Funktionen und Kurven

Gleichungsformen und Umrechnungen

Text Nummer: 54010

Stand: 25. Mai 2016

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Thema „Kurven“ ist sehr umfangreich. Ich habe sehr lange recherchiert, um herauszufinden, was die Literatur und das Internet anbietet, oder mit anderen Worten, welche Kurvenarten und welche Fragestellungen zu untersuchen sind.

Ich habe abschließend die Stoffverteilung so vorgenommen, dass ich im vorliegenden Text 54010 zunächst beschreibe, was für Arten von Kurvengleichungen auftreten können. An Hand einiger Beispiele zeige ich dann, wie man sie ineinander umrechnen kann. Diesen Text sollte man ansehen, bevor man andere Texte bearbeitet.

Die Methoden zur Kurvendiskussion stehen dann im Text 54011 „Differentialgeometrie“.

Es fehlen im Moment noch die Themen

Evolute, Parametrisierung nach der Bogenlänge sowie Raumkurven.

Dann folgen diese **Spezialtexte**:

Sie enthalten Herleitungen der speziellen Kurvengleichungen sowie Kurvenuntersuchungen

54031	Hüllkurven von Kurvenscharen
54050	Kreise
54060	Ellipsen
54070	Hyperbeln
54080	Parabeln
54101	Zykloiden
54103	Kleeblattkurven
54105	Parabola nodata (Knotenparabel)
54110	Traktrix
54112	Kardioiden
54115	Asteroiden
54120	Cassini-Kurven und Lemniskate
54125	Strophoiden
54128	Zissoiden (Kissoiden)
54130	Konchoiden
54135	Spiralen
54145	Neilsche Parabel
54150	Kartesisches Blatt
54155	Versiera
54160	Serpentine
54165	Pascalsche Schnecke
54170	Lissajous-Figuren
54180	Kettenlinie

Inhalt

1 Kurvengleichungen

1.1 Algebraische Gleichungen

Eine **ebene Kurve** ist eine Teilmenge der Punktmenge einer Ebene, die man auch mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnen kann, die durch eine Gleichung für die Koordinaten der Kurvenpunkte gegeben ist.

Üblicherweise verwendet man kartesische Koordinaten x und y zur Lagebeschreibung der Punkte der Ebene, wenn man ein **kartesisches Koordinatensystem** verwendet.

Die Gleichung $y = x^2$ beschreibt zum Beispiel eine Normalparabel. Diese Gleichung ist die Bedingung dafür, dass ein Punkt auf der Parabel liegt. $A(3\,|\,9)$ ist somit ein Parabelpunkt, nicht aber $Q(2\,|\,5)$. Allgemein gilt für Punkte dieser Kurve: $P(x\,|\,x^2)$.

Kurven treten oft im Zusammenhang mit **Funktionen** auf. Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung $x \to y$, wobei man dann y den Funktionswert von x heißt, was man so schreiben kann: $y = f(x)$.
Der **Graph** der Funktion $f(x) = 2x - 1$ ist dann auch eine „Kurve" im mathematischen Sinne, auch wenn es sich um eine Gerade handelt. Hier also unterscheiden sich die Begriffe „Kurve" aus der Umgangssprache und „Kurve" aus der Mathematik.

Kreis und Ellipse sind auch Kurven, aber sie gehören zu keiner Funktion, weil es auf diesen Kurven keine eindeutige Zuordnung $x \to y$ mehr gibt. Die Gleichungen dieser Kurven sehen daher anders aus, sie enthalten beispielsweise auch y^2: $x^2 + 2x + y^2 = 4$ stellt beispielsweise einen Kreis dar, und $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ist die Normalform einer Ellipse um den Ursprung.
Treten gemischte Produkte xy auf, wie in $40x^2 - 36xy + 13y^2 = 196$, dann kommt Schräglage noch hinzu. Gleichungen, die keine Funktion mehr darstellen, nennt man dann eine Relation.
Oftmals kann man diese Relation in zwei Ersatzfunktionen zerlegen.

Beispiel: Die Kreisgleichung $x^2 + 2x + y^2 = 4$ kann man umstellen nach $y^2 = -x^2 - 2x + 4$
Und daraus folgt dann $y = \pm\sqrt{-x^2 - 2x + 4}$.
Das Schaubild der Funktion $f_1(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 4}$ ist dann der obere Halbkreis,
und das der Funktion $f_2(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 4}$ der untere Halbkreis.

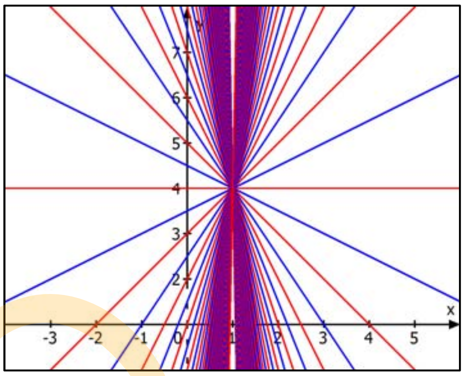
Alle bisher genannten Kurvengleichungen heißen **algebraische Gleichungen.** Darunter versteht man eine Gleichung der Form $F(x,y) = 0$, wobei F ein Polynom mit zwei Variablen (meist x und y) ist.
Oft steht rechts keine Null, was aber durch eine einfache Umformung immer zu erreichen ist:
z. B. $y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y - x^2 = 0$ usw. Die geometrische Darstellung der Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung heißt **algebraische Kurve**.

Für die Untersuchung solcher Kurven sind die Darstellungen durch Parameter oder Polarkoordinaten oft günstiger.

Funktionenscharen mit Parametern

Funktionenscharen enthalten zusätzlich zur Variablen x einen Parameter. Dieser wird nicht wie eine Variable behandelt, sondern als eine feststehende aber nicht genannte Zahl angesehen. Dadurch haben die durch die Gleichung definierten Funktionen dieselbe Gleichungsform und auch Gemeinsamkeiten im Verlauf des Schaubilds. Diese Parameter heißen daher auch Formvariable.

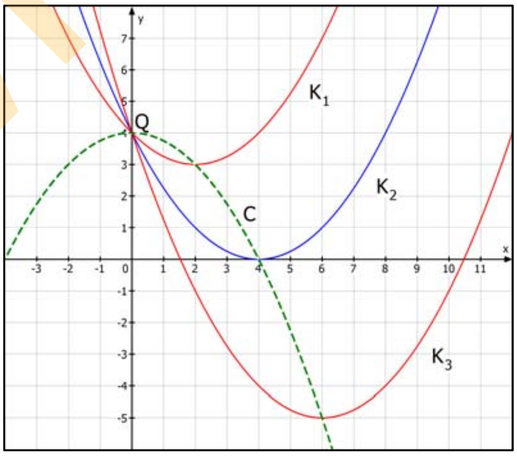
Beispiel 1: $f(x,t) = t \cdot x + 4 - t$



Hier ist x die laufende Variable und t der Parameter.
Zu jedem Parameterwert gibt es eine eigene Funktion und in der geometrischen Darstellung einen eigenen Graphen (Kurve).

Die Abbildung zeigt 201 Geraden dieser Kurvenschar, denn ich habe mit MatheGrafix die Kurvenschar für t = -50 bis t = 50 darstellen lassen, und zwar mit der Schrittweite $\Delta t = 0{,}5$. Im Innenbereich liegen die Geraden sehr dicht beisammen, was seinen Grund darin hat, dass t in diesem Beispiel die Steigung der Geraden darstellt, und für $t \to \infty$ werden daher die Geraden immer steiler.

Beispiel 2: $f_t(x) = \frac{1}{4}x^2 - tx + 4$ für $t, x \in \mathbb{R}$



Der Parameter t unterscheidet hier zwischen den einzelnen Parabeln der Kurvenschar. Dargestellt sind die Kurven

für	t = 1:	K_1:	$y = f_1(t) = \frac{1}{4}x^2 - x + 4$
	t = 2:	K_2:	$y = f_2(t) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$
	t = 3:	K_3:	$y = f_3(t) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 4$

Die **Parabelscheitel** dieser Schar liegen auf einer Kurve C:

Ableitung:	$f_t'(x) = \frac{1}{2}x - t$
Bedingung für die Scheitel:	$f_t'(x) = 0 \iff \frac{1}{2}x - t = 0 \iff x_S = 2t$
y-Koordinate:	$y_S = f_t(2t) = \frac{1}{4} \cdot 4t^2 - t \cdot 2t + 4 = t^2 - 2t^2 + 4 = -t^2 + 4$
Parabelscheitel:	$S_t(2t \mid -t^2 + 4)$

Diese Scheitel liegen auf einer sogenannten **Ortskurve** C, deren Gleichung man so bestimmt:

Es gilt:	$x_S = 2t$	$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}x_S$
und	$y_S = -t^2 + 4$	
$t = \frac{1}{2}x_S$ einsetzen:	$y_S = -\frac{1}{4}{x_S}^2 + 4$	

Ergebnis: Die Parabelscheitel S_t liegen auf der Kurve C: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

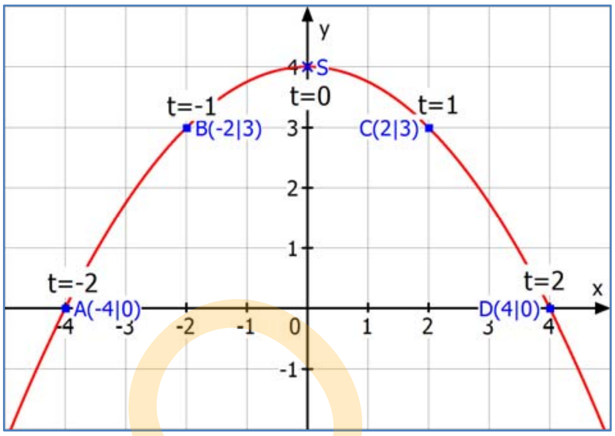
1.2 Parametergleichungen von Kurven

Die Verwendung von Parametern zur Darstellung von Kurvenscharen ist jedoch nicht das Thema dieses Textes, denn dabei dient der Parameter nur zur Unterscheidung der einzelnen Scharkurven. Dagegen ist die Erzeugung der Gleichung der <u>Ortskurve der Parabelscheitel</u> das eigentliche Thema, zumindest der Anfang davon. Beispiel:

Diese Parabelscheitel lassen sich hier durch diese beiden Gleichungen berechnen:

$x_S = 2t$ und $y_S = -t^2 + 4$ für $t \in \mathbb{R}$.

Wenn man t alle Werte durchlaufen lässt, dann erhält man eben „alle" Scheitel, d. h. eine Kurve (auf der diese Scheitel liegen). Rechts ist diese Kurve dargestellt. An einige Punkte sind auch die zugehörigen Parameterwerte angefügt.



Die explizite Gleichung dieser Parabel (in kartesischen Koordinaten) lautet $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Beispiel 3: Der waagrechte Wurf im Vakuum (Beispiel aus der Physik)

(1) Ein Massepunkt wird in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v_o geworfen. Ohne Gravitation führt dieser Punkt im Vakuum **in x-Richtung eine gradlinig gleichförmige Bewegung** durch mit der Weg-Zeit-Gleichung: $x(t) = v_o \cdot t$.

(2) Würde man diesen Gegenstand nicht werfen, sondern nur fallen lassen, dann würde er im Vakuum eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung durchführen. Die als konstant angenommene Erdfall-Beschleunigung wird mit g bezeichnet und es ist $g \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}$.
Die Weg-Zeit-Gleichung für die Bewegung in y-Richtung (nach unten) lautet $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

(3) Beim waagrechten Wurf finden beide Bewegungen zugleich statt und überlagern sich ungestört.

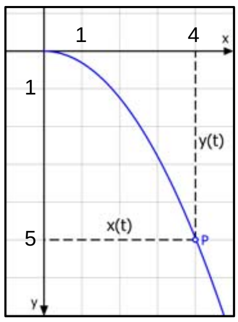
Zahlenbeispiel:

Die Abwurfgeschwindigkeit sei $v_o = 4\frac{m}{s}$ (= 14,4 $\frac{km}{h}$), dann lauten die beiden Bewegungsgleichungen (ohne Einheiten)

$x(t) = 4 \cdot t$ (1) und $y(t) \approx 5 \cdot t^2$ (2)

Für t = 1 erhält man beispielsweise: $x(1) = 4$ und $y(1) = 5$, also $P(4\,|\,5)$.

*(2) ist die **Parameterdarstellung der Flugparabel**.*



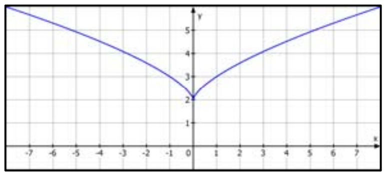
Ihre explizite Gleichung erhält man, indem man den Parameter t (die Zeit) eliminiert.

Aus (1) folgt $t = \frac{x}{4}$, in (2) eingesetzt: $y = 5 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}x^2 \approx 0{,}31 \cdot x^2$

Ergebnis: Die Wurfbahn hat die Gleichung $y \approx 0{,}31 \cdot x^2$

Achtung: Gemäß den physikalischen Gegebenheiten zeichnet man hier die <u>y-Achse nach unten</u>.

Beispiel 4: $x(t) = t^3$ und $y(t) = t^2 + 2$ für $t \in \mathbb{R}$,



Die x- und die y-Koordinate werden aus einem Parameter t berechnet.
Man nennt dies dann eine **Parameterdarstellung** einer Kurve.

Sehr oft verwendet man für diese Kurven dann die ***Vektorschreibweise***, indem man eine Gleichung für den Ortsvektor eines beliebigen Kurvenpunktes angibt: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 + 2 \end{pmatrix}$.

Keine Angst – man muss dazu keine Vektorrechnung können. Man kann dies auch einfach als andere Art der Gleichungsdarstellung ansehen: die Terme für x und y stehen eben untereinander in einer Klammer. Man kann aus den beiden Parametergleichungen für x und y durch Elimination des Parameters eine algebraische Gleichung für x und y herstellen.

$$t = x^{1/3} \text{ in } y = t^2 + 2 \Rightarrow y = \left(x^{1/3}\right)^2 + 2 \Rightarrow y = x^{2/3} + 2$$

Beispiel 5: Die Gerade $y = 2x - 5$ kann auf beliebig viele Arten parametrisiert werden.

(1) Die einfachste Art ist: $x(t) = t$ und $y(t) = 2t - 5$

(2) Es geht auch komplizierter: $x(t) = 4 - 2t$. Das setzt man in die Geradengleichung ein:

$$y(t) = 2(4 - 2t) - 5 \Leftrightarrow y(t) = -4t + 3.$$

Umgekehrt kann man zur Parameterdarstellung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ -4t + 3 \end{pmatrix}$, die Koordinatengleichung herstellen. Man löst $x = 4 - 2t$ nach t auf: $2t = 4 - x \Leftrightarrow t = 2 - \frac{1}{2}x$

Das wird in y(t) eingesetzt: $y = -4\left(2 - \frac{1}{2}x\right) + 3 \Leftrightarrow y = 2x - 5$

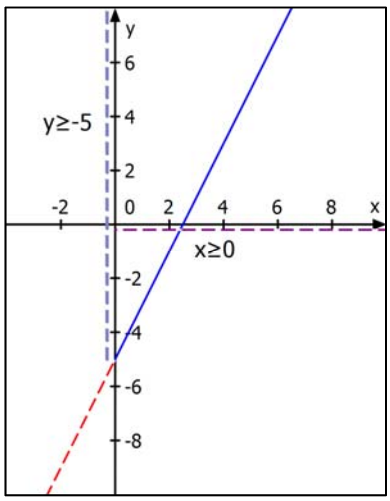
Manche Parametrisierungen schränken den Definitionsbereich ein,

was nicht sein darf:

(3) Ich wähle für unsere Gerade: $x(t) = t^2$

In $y = 2x - 5$ eingesetzt: $y(t) = 2 \cdot t^2 - 5$

Man erhält so die Gleichungen $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 - 5 \end{pmatrix}$



Jetzt betrachten wir die Wertmenge der Funktion x(t):

Da $t^2 \geq 0$ ist, folgt: $x \in [0; \infty[$

Und für y(t) folgt: $y \in [-5; \infty[$

Das bedeutet, dass die Parametergleichung nur noch eine Halbgerade darstellt, denn negative x-Werte und y-Werte kleiner als -5 kommen nicht mehr vor.

(4) Beeindruckend kann auch <u>diese</u> Parametrisierung unserer Geraden sein:

Ich wähle $x(t)=\frac{1}{t-2} \Rightarrow y(t)=2\cdot\frac{1}{t-2}-5=\frac{2}{t-2}-\frac{5(t-2)}{t-2} \Leftrightarrow y(t)=\frac{12-5t}{t-2}$

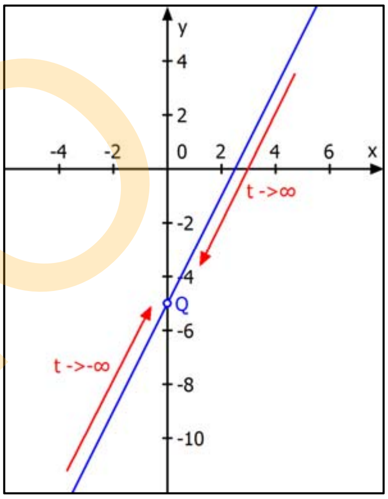
Man erkennt, dass es zu t = 2 keinen Kurvenpunkt gibt.

Außerdem gibt es kein t für den Punkt $Q(0\,|\,-5)$, denn $\frac{1}{t-2}=0$ hat keine Lösung.

Aber es ist $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)=0$ und $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{12-5t}{t-2}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{\frac{12}{t}-5}{1-\frac{2}{t}}=-5$

Die Gerade nähert sich also Q an, erreicht Q aber nie. Q ist ein Loch in der Geraden.

Was ergibt also diese Parametergleichung $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{t-2}\\ \frac{12-5t}{t-2}\end{pmatrix}$ für $t\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$?



Für t > 2 ist x > 0: Geht t von 2 bis ∞, dann gleitet der Geradenpunkt aus dem Unendlichen (rechts oben) nach links unten gegen Q.

Für t < 2 ist x < 0: Geht t von 2 bis $-\infty$, dann gleitet der Geradenpunkt aus dem Unendlichen (links unten) nach rechts oben gegen Q.

Im Ganzen gesehen ist das Schaubild eine **punktierte Gerade**.

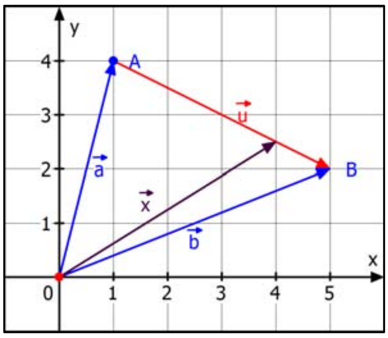
Für Ungläubige zeige ich hier auch noch durch Rechnung, dass unsere "Kurve" die gegebene Gerade ist:

$x=\frac{1}{t-2} \Rightarrow t-2=\frac{1}{x} \Rightarrow t=\frac{1}{x}+2$

in $y=\frac{12-5t}{t-2} \Rightarrow y=\frac{12-5\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right)}{\frac{1}{x}+2-2}=\frac{2-\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(2-\frac{5}{x}\right)\cdot x=2x-5$

Allerdings hat die Gerade bei der vorliegenden Parametrisierung das Loch $Q(0\,|\,-5)$.

Beispiel 6: Parameterdarstellung für eine Strecke



Gegeben ist die Strecke von $A(1|\,4)$ bis $B(5\,|\,2)$.

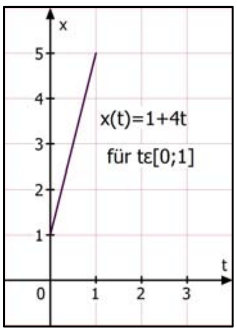
In der Vektorrechnung hat eine Gerade diese Gleichungsform:

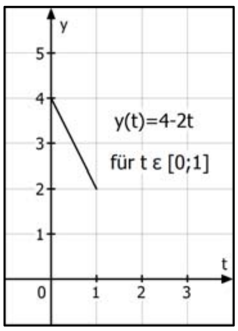
$\vec{x}=\vec{a}+t\cdot\vec{u}$, den Richtungsvektor $\vec{u}$ berechnet man so:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

Die Geradengleichung, die im Grunde eine Berechnungsformel für die Ortsvektoren der Punkte auf der Geraden (AB) ist, lautet dann

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4t\\4-2t\end{pmatrix}$ oder $\begin{Bmatrix}x(t)=1+4t\\y(t)=4-2t\end{Bmatrix}$.





Da hier nur die Strecke AB in Frage kommt, schränkt man t auf $t\in[0\,;1]$ ein.

Rechts: Dies sind dann die gesuchten Koordinatenfunktionen für die gegebene Strecke.

Beispiel 7: Kreisgleichung parametrisieren

Es gibt Gleichungen von Kurven, die nicht Schaubild einer Funktion sein können.

Bekanntestes Beispiel ist die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 16$

Durch Umstellen nach y^2 erhält man $y^2 = 16 - x^2$ bzw. $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$

Es gibt also zwei Ersatzfunktionen: $f_1(x) = \sqrt{16 - x^2}$ und $f_2(x) = -\sqrt{16 - x^2}$

f_1 hat als Schaubild den oberen Halbkreis und f_2 den unteren Halbkreis.

Will man diese Gleichung parametrisieren, bringt die Wahl x = t nicht viel Vorteil, weil dann $y = \pm\sqrt{16 - t^2}$ nicht anders aussieht. Das ändert sich, wenn man so vorgeht:

$$x(t) = 4 \cdot \cos(t) \quad \text{und} \quad y(t) = 4 \cdot \sin(t) \quad \text{für} \quad t \in [0\,;2\pi[$$

Man schließt $t = 2\pi$ aus, weil man dann schon wieder bei t = 0 angekommen ist!

Setzt man beides in die Kreisgleichung ein, folgt:

$$16 \cdot \cos^2(t) + 16 \cdot \sin^2(t) = 16 \cdot \left[\cos^2(t) + \sin^2(t)\right] = 16 \cdot 1 = 16$$

Dies funktioniert, weil es den „trigonometrischen Pythagoras“ gibt: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$.

d. h. $P\left(4 \cdot \cos(t) \mid 4 \cdot \sin(t)\right)$ ist ein Punkt dieses Kreises.

Aufgabe 1

Beurteile, ob die folgenden vier Parameterdarstellungen zur gleichen Kurvengleichung führen:

a) $x = t,\ y = t$ b) $x = t^2,\ y = t^2$ c) $x = -t,\ y = -t$

d) $x = \frac{10}{t},\ y = \frac{10}{t}$ e) $x = \sin(t),\ y = \sin(t)$.

Wie werden die Kurven mit wachsendem t durchlaufen?

Aufgabe 2

Warum ist $x = \sqrt{t-2},\ y = \sqrt{1-t}$ keine Parameterdarstellung einer Kurve?

Aufgabe 3

Warum stellt $x = 4t^2,\ y = 1 + t$ zwar eine algebraische Kurve, nicht aber eine Funktion dar?

Aufgabe 4

Welchen maximalen Definitionsbereich hat die durch $x = \sqrt{t+2},\ y = \sqrt{2-t}$ dargestellte Funktion?

Aufgabe 5

Berechne zu den folgenden Kurven eine Gleichung der Form $F(x,y) = 0$:

a) $x = t^3,\ y = t^4$ b) $x = \frac{a}{\cos(t)},\ y = \frac{b}{\sin(t)}$,

c) $x = \frac{2}{t^2},\ y = 1 - t$ d) $x = a \cdot \cos^2(t),\ y = a \cdot \sin^2(t)$

Aufgabe 6

Die durch die Gleichung $y^2 = x^3$ definierte Kurve heißt **Neilsche Parabel.**

Gib eine Parameterdarstellung $x = g(t),\ y = h(t)$ dafür an, bei der g und h ganzrationale Funktionen sind.

Die Lösungen der Aufgaben stehen auf der nächsten Seite.

Lösung Aufgabe 1

a) $x = t,\ y = t$ b) $x = t^2,\ y = t^2$ c) $x = -t,\ y = -t$ d) $x = \frac{10}{t},\ y = \frac{10}{t}$

e) $x = \sin(t),\ y = \sin(t)$.

Alle fünf Parameterdarstellungen passen zur Gleichung $y = x$, die eine Geradengleichung ist.

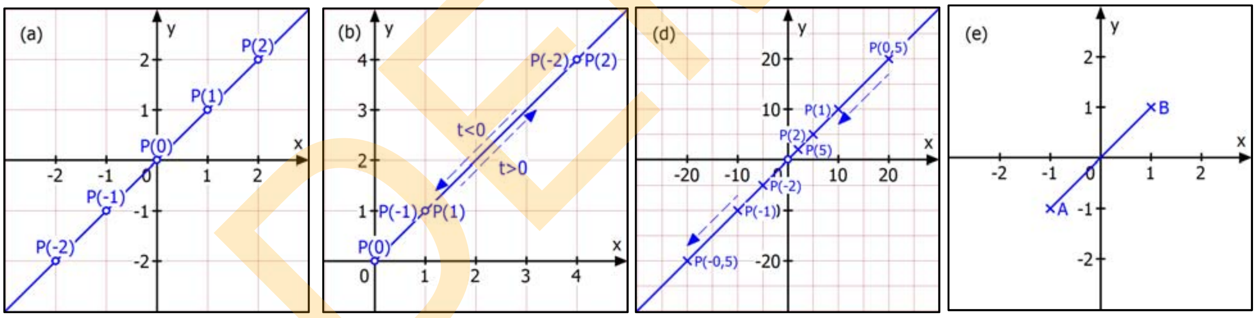
Die Unterschiede sind jedoch:

Legt man $t \in \mathbb{R}$ zugrunde, dann wird diese Gerade unterschiedlich durchlaufen.

Bei a) von links unten nach rechts oben. Bei b) wird nur noch eine Halbgerade dargestellt, weil t^2 nicht negativ werden kann. Diese wird aber dann doppelt durchlaufen! Bei c) erhält man wieder die ganze Gerade, nur wird sie von rechts oben nach links unten durchlaufen, entgegengesetzt zu a).

d) Jetzt wird nicht mehr die ganze Gerade dargestellt, denn $x = \frac{10}{t}$ wird für kein t Null. Also erhält man eine „punktierte Gerade“, der Ursprung fehlt. Man achte auf den Maßstab der Abbildung. Läuft t von $-\infty$ gegen 0, dann gleitet der zugehörende Kurvenpunkt ab dem Ursprung nach unten links ins Unendliche. Ab t = 0 bis gegen Unendlich kommt er dann wieder von rechts oben herein und läuft quasi „asymptotisch“ auf den Ursprung zu, den er nicht erreicht.

Bei (e) wird schließlich nur die Strecke AB dargestellt. Der laufende Kurvenpunkt führt auf ihr eine harmonische Schwingung aus. Er durchläuft die Strecke genau einmal von A nach B, wenn t die Werte von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ einnimmt. Wenn man t von 0 bis 2π gehen lässt, schwingt der Kurvenpunkt vom Ursprung nach B, dann zurück nach A und wieder in den Ursprung.



Lösung Aufgabe 2

Warum ist $x = \sqrt{t-2},\ y = \sqrt{1-t}$ keine Parameterdarstellung einer Kurve?

Die Definitionsbereiche der t-Funktionen sind:

Bei x gilt $t \geq 2$ also $\mathbf{D}_x = [2;\infty[$, bei y gilt $1-t \geq 0 \iff t \leq 1$ also $\mathbf{D}_y =]-\infty;1]$.

Da ihre Schnittmenge leer ist, gibt es keine Werte für t, die für x und y verwendbar sind..

Lösung Aufgabe 3

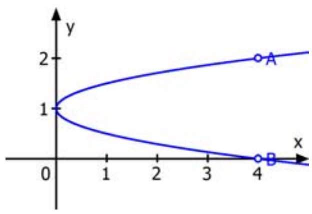
Warum stellt $x = 4t^2,\ y = 1+t$ zwar eine algebraische Kurve, nicht aber eine Funktion dar?

Weil die Zuordnung nicht mehr eindeutig ist.

Beispiel: $x(\pm 1) = 4,\ y(1) = 2,\ y(-1) = 0$.

Also gibt es diese Zuordnungen:

$4 \to 2$ (A) und $4 \to 0$ (B). Dies ist bei einer Funktion nicht möglich.



Lösung Aufgabe 4

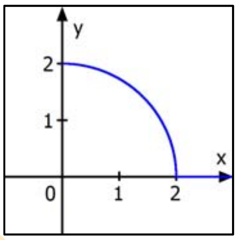
Welchen maximalen Definitionsbereich hat die durch $x=\sqrt{t+2},\ y=\sqrt{2-t}$ dargestellte Funktion?

Zuerst der Definitionsbereich für x: $t\ge -2 \iff \mathbf{D}_x=[-2\,;\infty[$.

Dann der Definitionsbereich für y: $2-t\ge 0 \iff t\le 2 \iff \mathbf{D}=]-\infty\,;2]$

Die Schnittmenge ist also. $D_t=[-2\,;2]$.

Das ergibt für x(t) die „Wertmenge" $W_x=[0\,;2]$, denn $x(-2)=\sqrt{0}=0$ und $x(2)=\sqrt{4}=2$.



Damit ist der Definitionsbereich für die Funktion $f: x\to y$ $W_x=[0\,;2]$.

Übrigens handelt es sich um diese Funktion:

$$x=\sqrt{t+2} \Rightarrow t=x^2-2 \Rightarrow y=f(x)=\sqrt{2-\left(x^2-2\right)}=\sqrt{4-x^2}$$

Das Schaubild ist ein Viertelkreis. Das erkennt man auch so:

$$x^2+y^2=t+2+2-t=4 \iff x^2+y^2=4 \quad \text{(Kreisgleichung).}$$

Die Einschränkung auf den Definitionsbereich $[0\,;2]$ kommt durch die Wurzeln der Parameterform.

Lösung Aufgabe 5

Berechne zu den folgenden Kurven eine Gleichung der Form $F(x,y)=0$:

a) $x=t^3,\ y=t^4 \Rightarrow x^4=t^{12}$ und $y^3=t^{12} \Rightarrow x^4=y^3$ bzw. $\boxed{x^4-y^3=0}$

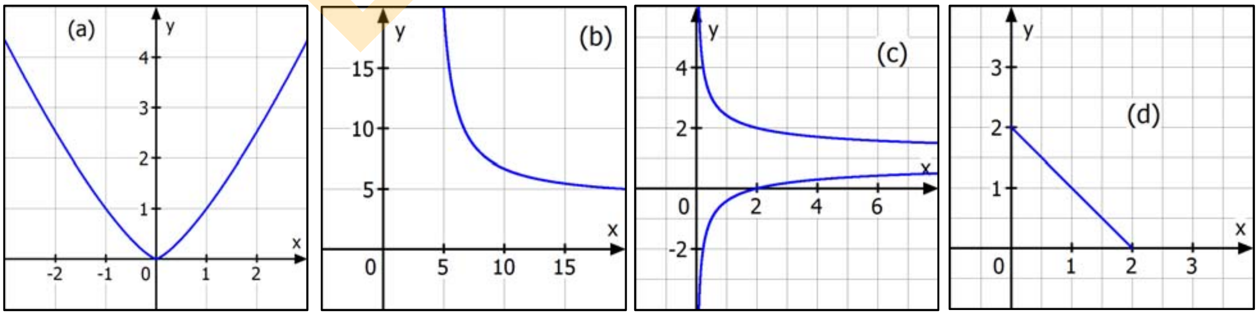
b) $x=\dfrac{a}{\cos(t)},\ y=\dfrac{b}{\sin(t)} \Rightarrow \cos(t)=\dfrac{a}{x},\ \sin(t)=\dfrac{b}{y} \Rightarrow \cos^2(t)+\sin^2(t)=1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=1}$

bzw. bruchfrei: $a^2y^2+b^2x^2-x^2y^2=0$

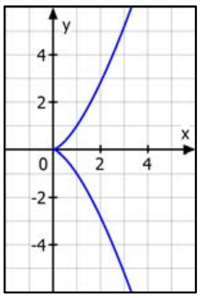
c) $x=\dfrac{2}{t^2},\ y=1-t \Rightarrow t=1-y \Rightarrow x=\dfrac{2}{(1-y)^2} \iff \boxed{x\cdot(1-y)^2-2=0}$

d) $x=a\cdot\cos^2(t),\ y=a\cdot\sin^2(t) \iff x+y=a\cdot\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right) \iff \boxed{x+y=a} \iff x+y-a=0$

Das ist eine Geradengleichung. Doch durch die Parameterdarstellung ist x eingeschränkt auf das Intervall 0 bis a (in der Abb. Ist a = 2), also stellt die Gleichung eine Strecke dar.



Lösung Aufgabe 6



Die durch die Gleichung $y^2=x^3$ definierte Kurve heißt Neilsche Parabel. Gib eine Parameterdarstellung $x=g(t),\ y=h(t)$ dafür an, bei der g und h ganzrationale Funktionen sind:

$$x=t^2 \Rightarrow y^2=\left(t^2\right)^3=t^6 \iff y=t^3$$

1.3 Polarkoordinaten

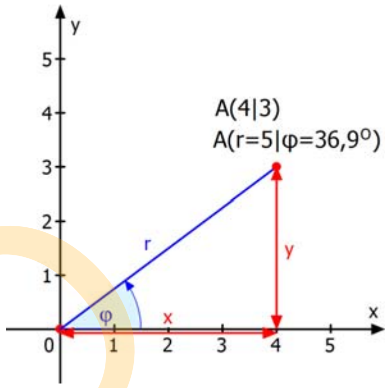
Man kann für Punkte statt der kartesischen Koordinaten auch Polarkoordinaten angeben. Darunter versteht man die Größen r (Abstand vom Ursprung) und φ (gelesen „phi“, Winkel gegen die positive x-Achse): $A\left(r=5\,|\,36{,}9^\circ\right)$. Dieser kann im Gradmaß oder im Bogenmaß angegeben werden.

Beziehungen zwischen kartesischen und Polarkoordinaten:

(1) Kartesische Koordinaten aus Polarkoordinaten berechnen:

$$\cos(\varphi)=\frac{x}{r} \Rightarrow \boxed{x=r\cdot\cos(\varphi)}$$

$$\sin(\varphi)=\frac{y}{r} \Rightarrow \boxed{y=r\cdot\sin(\varphi)}$$



(2) Polarkoordinaten aus kartesischen Koordinaten berechnen:

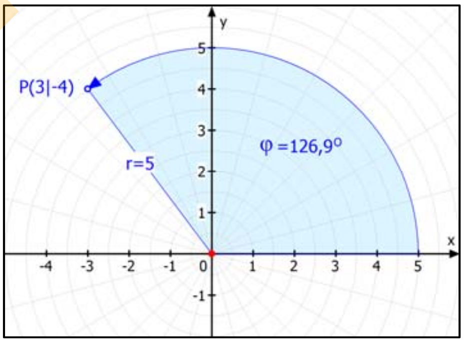
$$\tan\varphi=\frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Hinweis: Es gilt selbstverständlich: $r\geq 0$ und oft $\varphi\in\left[\,0\,;360^\circ\,\right[$

Beispiele:

a) Der Punkt $P(-3\,|\,4)$ hat diese Polarkoordinaten:

$r=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ und $\varphi=\arctan\frac{4}{-3}\approx 126{,}9^\circ$



Taschenrechner liefern hier meistens einen negativen Winkel.
Durch Addition von 180° erhält man den gesuchten Wert.

```
tan⁻¹ 4/-3
              -53.13010235
180+Ans
               126.8698976
```

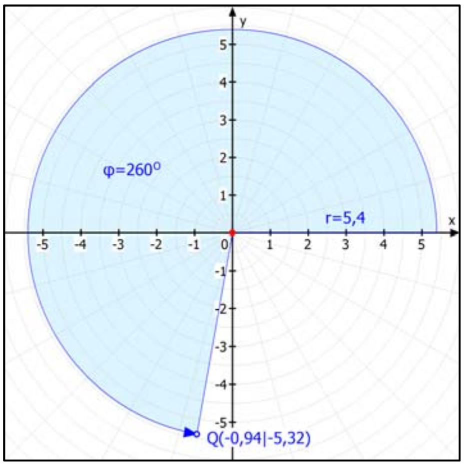
b) Welche kartesischen Koordinaten hat ein Punkt Q mit den Polarkoordinaten $r=5{,}4$ und $\varphi=260^\circ$?

$x=5{,}4\cdot\cos\left(260^\circ\right)\approx -0{,}94$ und

$y=5{,}4\cdot\sin\left(260^\circ\right)\approx -5{,}32$

```
5.4×cos 260
             -0.9377001594
5.4×sin 260
             -5.317961866
```

Ergebnis $Q\left(-0{,}94\,|\,-5{,}32\right)$



Aufgabe 7

a) Berechne die Polarkoordinaten zu $A(-4\,|\,-2)$ und $B(8\,|\,-2)$

b) Berechne die kartesischen Koordinaten zu $C\left(r=12\,|\,90^\circ\right)$ und $D\left(r=7{,}3\,|\,213^\circ\right)$

Lösung auf der nächsten Seite.

Lösung Aufgabe 7:

```
tan-1 .5
                26.56505
Ans+180
                206.5650
```

a) Berechnung der Polarkoordinaten:

$A(-4\,|\,-2):\ r=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}\,,\qquad \varphi=\arctan\left(\frac{-2}{-4}\right)=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\approx 26{,}565^{\circ}$

Für den 3. Quadranten muss man allerdings 180° dazu addieren: $\varphi\approx 206{,}565^{\circ}$

$B(8\,|\,-2):\ r=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}\,,\qquad \varphi=\arctan\left(\frac{-2}{8}\right)=\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)\approx 165{,}964^{\circ}$

Für den 4. Quadranten muss man hier so rechnen:

$\varphi=360^{\circ}-14{,}036^{\circ}\approx 345{,}964^{\circ}$

```
tan-1 (-.25)
             -14.0362434
Ans+360
              345.963756
```

b) Berechnung der kartesischen Koordinaten aus diesen Polarkoordinaten:

$C\left(r=12\,|\,90^{\circ}\right):\quad x=r\cdot\cos(\varphi)=12\cdot\cos\left(90^{\circ}\right)=12\cdot 0=0$

$y=r\cdot\sin(\varphi)=12\cdot\sin\left(90^{\circ}\right)=12\cdot 1=12$

Ergebnis: $C(0\,|\,12)$

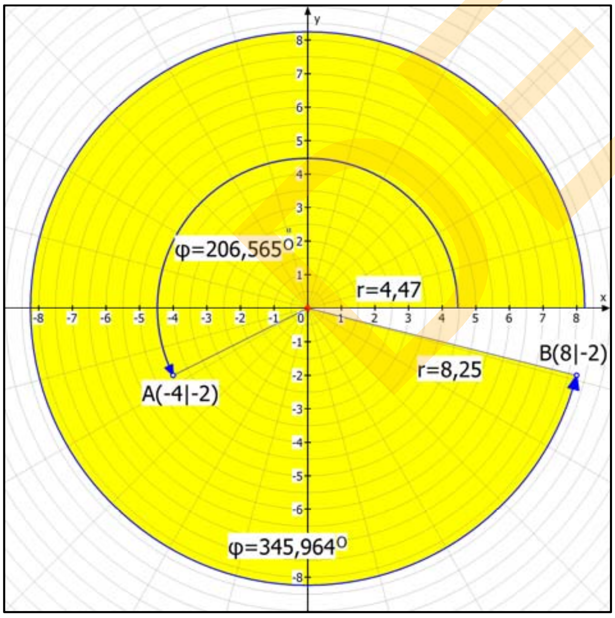
$D\left(r=7{,}3\,|\,213^{\circ}\right)\quad x=r\cdot\cos(\varphi)=7{,}3\cdot\cos\left(213^{\circ}\right)\approx -6{,}122$

$y=r\cdot\sin(\varphi)=7{,}3\cdot\sin\left(213^{\circ}\right)=-3{,}976$

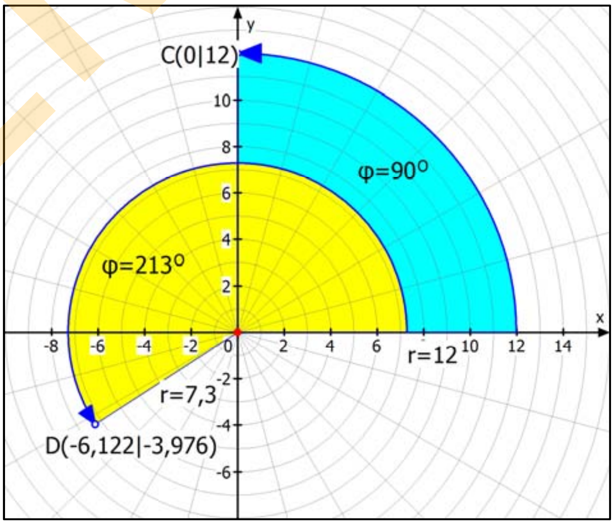
Ergebnis: $D(-6{,}122\,|\,-3{,}976)$

```
7.3×cos 213
             -6.122295146
7.3×sin 213
             -3.975864956
```

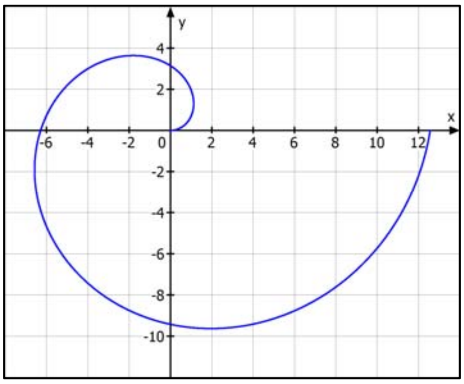
Zu Aufgabe 7a.



Zu Aufgabe 7b.



1.4 Kurvengleichungen mit Polarkoordinaten



Für Kurven, die sich um den Ursprung „herumwickeln“ wie Kreis, Ellipse, Spiralen und viele andere bietet sich die Darstellung durch **Polarkoordinaten** an. Diese sehen dann z. B. so aus:

Beispiel 8: $r = 2 \cdot \varphi$

Die Kurve heißt **Archimedische Spirale.**
Siehe Spezialtext 54135.

Man kann genau wie bei den kartesischen Koordinatengleichungen eine Wertetafel erstellen.

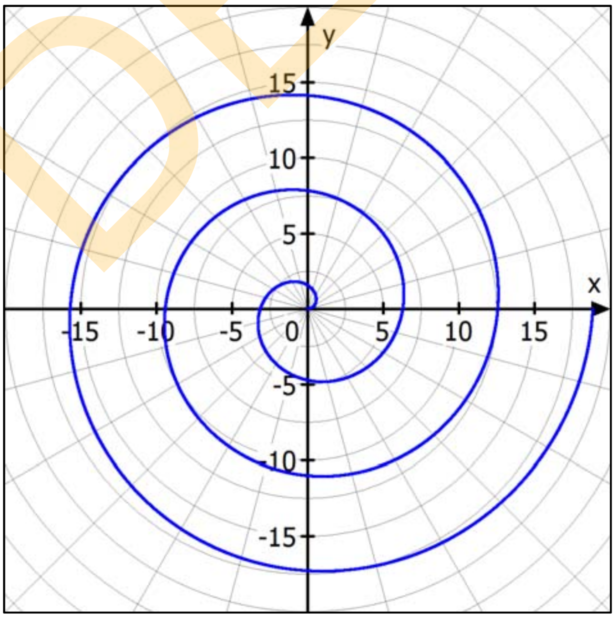
Die erste Spalte enthält den Winkel φ im Bogenmaß in Schritten von $\frac{1}{6}\pi$, was 30^{O} entspricht. Die zweite Spalte enthält den zugehörenden Radius.

0.	0.
π/6	1.0472
2*π/6	2.0944
π/2	3.14159
4*π/6	4.18879
5*π/6	5.23599
π	6.28319
7*π/6	7.33038
8*π/6	8.37758
3*π/2	9.42478
10*π/6	10.472
11*π/6	11.5192
2*π	12.5664

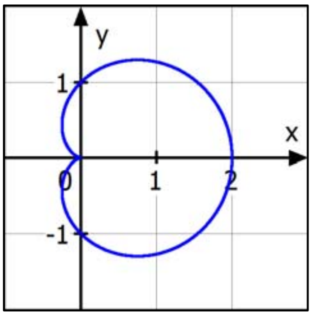
Die Archimedische Spirale hat auch eine Parametergleichung:

$$x(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) = 2 \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi)$$
$$y(\varphi) = r \cdot \sin(\varphi) = 2 \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi)$$

Dazu noch eine Abbildung mit anderem Maßstab und dem Polarkoordinatennetz: (MatheGrafix)



Beispiel 8: $r = 1 + \cos(\varphi)$ mit $0 \le \varphi < 2\pi$.



0.	2.
π/6	1.86603
2*π/6	1.5
π/2	1.
4*π/6	0.5
5*π/6	0.133975
π	0.
7*π/6	0.133975
8*π/6	0.5
3*π/2	1.
10*π/6	1.5
11*π/6	1.86603
2*π	2.

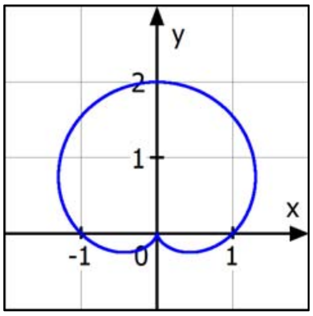
Die Kurve heißt **Kardioide**

und wird im Text 54112 ausführlich untersucht.

$r = 1 + \sin(\varphi)$

Das ist auch eine

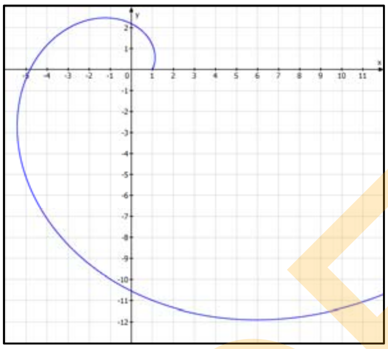
Kardioide



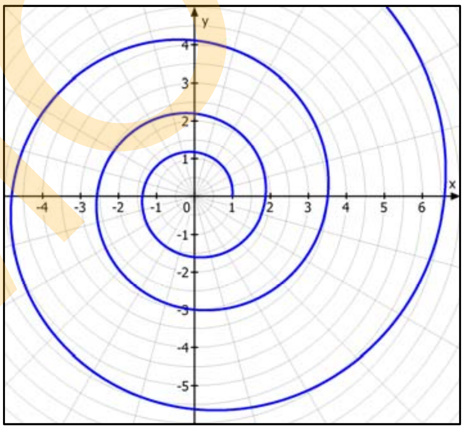
Beispiel 9 $r = e^{\varphi/2}$ $\varphi \in [0\,;\infty[$

Das sind **logarithmische Spiralen:**

Siehe Spezialtext 54135



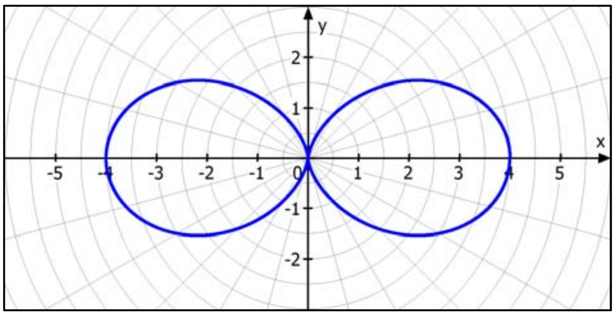
$r = e^{\varphi/10}$



Beispiel 10: $r = \cos^2(\varphi)$

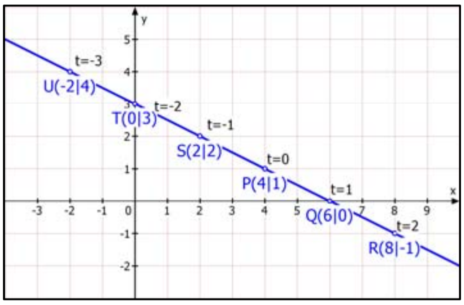
Diese Kurve ist eine **Lemniskate**:

Sie wird im Text 54120 behandelt.



2 Transformation von Kurvengleichungen

2.1 Parametergleichung $\Rightarrow$ algebraische Gleichung



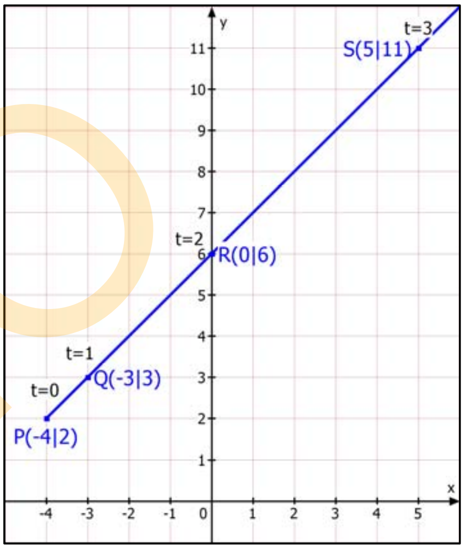
1 Gegeben ist $x(t) = 2t + 4$ und $y = 1 - t$ für $t \in \mathbb{R}$.

Aus $x = 2t + 4$ folgt $2t = x - 4 \Rightarrow t = \frac{1}{2}x - 2$

Einsetzen in $y = 1 - t \Rightarrow y = 1 - \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$

Wer Vektorrechnung kennt, dem sollte dies alles bekannt vorkommen. Die beiden Parametergleichungen sehen in Vektorschreibweise so aus:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t+4 \\ 1-t \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



2 Gegeben ist: $x(t) = t^2 - 4$ und $y = t^2 + 2$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$

Jetzt eliminiert man t^2:

$$t^2 = x + 4 \Rightarrow y = (x+4) + 2 \Leftrightarrow y = x + 6$$

Achtung: Wegen $x = t^2 - 4$ ist -4 der kleinste x-Wert, den die Kurve annehmen kann. Es liegt eine **Halbgerade** vor. Der Endpunkt der Halbgeraden ist $E(-4 \mid 2)$. Für negative t-Werte wird die Kurve ein zweites Mal durchlaufen.

3 Gegeben: $x(t) = \frac{1}{1-t}$ und $y(t) = \frac{1+t}{1-t}$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Aus $x = \frac{1}{1-t} \Rightarrow 1 - t = \frac{1}{x} \Rightarrow t = 1 - \frac{1}{x}$

Einsetzen in $y = \frac{1+t}{1-t}$: $y = \frac{1+1-\frac{1}{x}}{1-1+\frac{1}{x}} = \frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot x = 2x - 1$

Auch hier kann nicht jede Zahl x berechnet werden. Um dies herauszufinden sollte man, wie bei einer gebrochen rationalen Funktion üblich, den Grenzwert für $t \to \infty$ berechnen:

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{1-t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1} = \frac{0}{0-1} = 0$ Also wird $x = 0$ durch kein t erreichbar.

Also liegt eine punktierte Gerade vor: $y = f(x) = 2x - 1$ ohne $P(0 \mid -1)$.

4 Gegeben: $x(t) = \frac{t}{1-t}$ und $y(t) = \frac{1+t}{1-t}$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Aus $x = \frac{t}{1-t} \Rightarrow (1-t)x = t \Rightarrow x - tx = t \Rightarrow x = t + tx \Rightarrow t(1+x) = x \Rightarrow t = \frac{x}{x+1}$

Einsetzen in $y = \frac{1+t}{1-t}$: $y = \frac{1+\frac{x}{x+1}}{1-\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{x+1+x}{x+1}}{\frac{x+1-x}{x+1}} = \frac{\frac{2x+1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{2x+1}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{1} = 2x + 1$

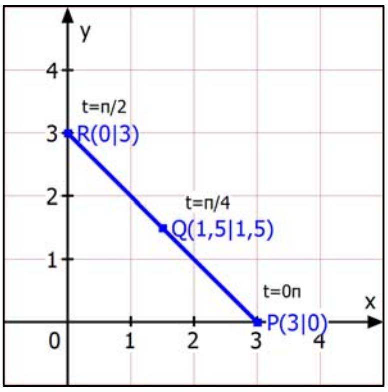
$\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t}{1-t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{t}-1} = \frac{1}{0-1} = -1$ Also wird x = -1 nicht erreicht.

Ergebnis:: $y = f(x) = 2x + 1$ ohne x = -1 ist eine punktierte Gerade mit dem Loch $L(-1 \mid -1)$

5 Gegeben ist: $x = a \cdot \cos^2(t),\ y = a \cdot \sin^2(t)$ für $t \in [0;2\pi[$ Man berechnet:

$x + y = a \cdot \left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) \Leftrightarrow \boxed{x + y = a} \Leftrightarrow y = -x + a$

Das ist zwar die Gleichung einer Geraden, doch da $\sin^2(t)$ und $\cos^2(t)$ nur Werte aus dem Intervall $[0;1]$ ergeben, gilt $x \in [0;a]$ und ebenso $y \in [0;a]$. Also liegt nur eine <u>Strecke</u> vor.



Die Abbildung verwendet a = 3: $y = -x + 3$.

Man erkennt, dass man für die Strecke nur $t \in \left[0;\frac{1}{2}\pi\right]$ benötigt.

Für $t \in \left[\frac{1}{2}\pi;\pi\right]$ wird die Strecke von oben nach unten durchlaufen usw.

6 Gegeben ist: $x = a \cdot \cos^2(t),\ y = b \cdot \sin^2(t)$ für $t \in [0;2\pi[$ a, b nicht beide 0.

Man berechnet:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \Leftrightarrow bx + ay = ab$

Ist $a \neq 0$, folgt: $y = -\frac{b}{a}x + b$

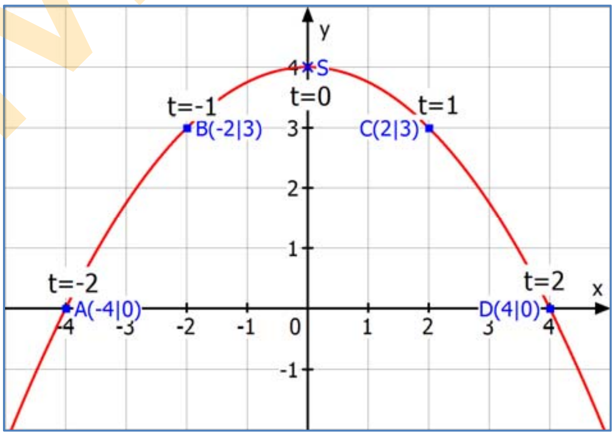
Ist a = 0, folgt: $bx = 0$ Ist jetzt $b \neq 0$, dann folgt $x = 0$ (y-Achse)

Also erhält man wegen des auf $[0;\cdot a]$ beschränkten Definitionsbereichs wieder eine Strecke.

7 Gegeben ist $x = 2t$ und $y = -t^2 + 4$ für $t \in \mathbb{R}$.

Man stellt um: $t = \frac{1}{2}x$ und setzt ein:

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ (Parabel).



8 Die Tiefpunkte einer Funktionenschar ergeben sich zu $T\left(\frac{1}{t} \mid \frac{1}{t^2}\right)$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ermittle die Ortskurve dieser Tiefpunkte.

Diese Aufgabe kann man auch so formulieren:

Eine Kurve ist gegeben durch $x(t) = \frac{1}{t}$ und $y(t) = \frac{1}{t^2}$,

Wie lautet die **explizite Gleichung** dieser Kurve in der Form $y = f(x)$?

Aus $x = \frac{1}{t}$ folgt $t = \frac{1}{x}$ Setzt man das in $y = \frac{1}{t^2}$ ein, erhält man $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2$

Gibt es eine Einschränkung für den Definitionsbereich?

Man erkennt: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0$, der Parabelpunkt für x = 0 wird nicht erfasst.

Ergebnis: $y = f(x) = x^2$ ohne x = 0, also punktierte Parabel.

Für Parabeln wird noch ein Spezialtext erstellt (54050)

9 Gegeben: $\begin{Bmatrix} x = t+1 \\ y = t^2+1 \end{Bmatrix}$

Aus der 1. Zeile folgt $t = x-1$, in die 2. Zeile eingesetzt: $y = (x-1)^2 + 1$

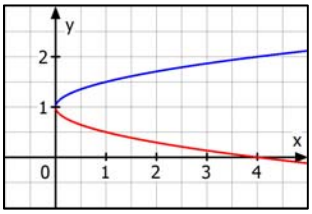
bzw. $y = x^2 - 2x + 2$ oder $x^2 - 2x + 2 - y = 0$. Parabel.

10 Gegeben ist $x = 4t^2,\ y = 1+t$ für $t \in \mathbb{R}$.

$t = y-1$, einsetzen: $x = 4\cdot(y-1)^2$. Löst man nach y auf, folgt

$y - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}x} \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Die Kurve ist eine nach rechts geöffnete Parabel.



11 $x(t) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\cos^2(t)$ und $y(t) = 3\cdot\cos(t)$ für $t \in [0;\pi]$

$y^2 = 9\cdot\cos^2(t) \quad \Rightarrow \quad \cos^2(t) = \frac{1}{9}y^2$

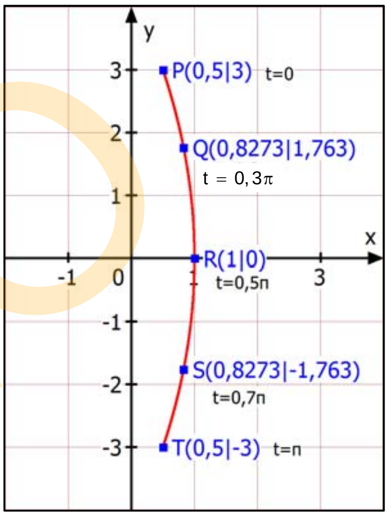
Einsetzen: $x = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}y^2$

bzw. $x + \dfrac{y^2}{18} = 1$

oder: $y^2 = 18\cdot(1-x)$ (*)

$y = \pm 3\sqrt{2(1-x)}$

Die Kurve ist der rechts dargestellte (Parabel-)Bogen, der für t von 0 bis $t = \pi$ einmal durchlaufen wird. Für t von π bis 2π durchläuft der Kurvenpunkt den Bogen von unten nach oben usw. Auch hier umfasst der durch die Parametergleichungen dargestellte Bogen nur ein Teilstück der ganzen Parabel von (*).



12 Gegeben: $x(t) = 2\cdot\cosh(t) - 3$ und $y(t) = 3\cdot\sinh^2(t) + 2$ für $t \in \mathbb{R}$

$\cosh(t) = \dfrac{x+3}{2}$ und $\sinh^2(t) = \dfrac{y-2}{3}$

Eingesetzt in den „hyperbolischen Pythagoras“:

$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

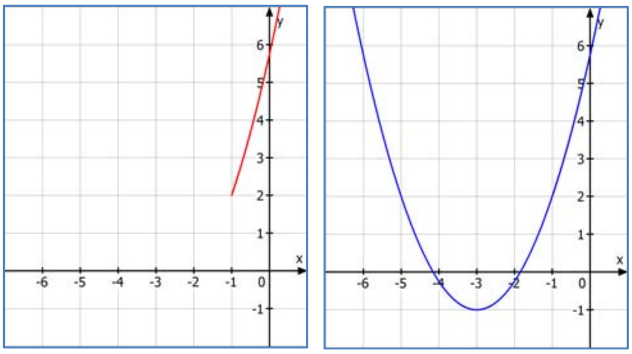
$\dfrac{(x+3)^2}{4} - \dfrac{y-2}{3} = 1 \ |\ \cdot 3$

$\frac{3}{4}(x+3)^2 - (y-2) = 3$

$\frac{3}{4}(x+3)^2 - 3 = (y-2)$

$y = \frac{3}{4}(x+3)^2 - 1$ mit dem Scheitel $S(-3\,|-1)$

Oder $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{23}{4}$



Man erkennt, dass $y(t) \geq 2$ ist, deshalb liefert die Parameterdarstellung nur einen Parabelbogen, der in $P(-1|2)$ endet, während die algebraische Gleichung die ganze Parabel darstellt.

$\boxed{13}$ Gegeben: $x(t) = 4 \cdot \cos(t)$ und $y(t) = 4 \cdot \sin(t)$ für $t \in [0\,;2\pi]$

Lösung: Man wendet folgenden Trick an:

$$x^2 + y^2 = 16 \cdot \cos^2 t + 16 \cdot \sin^2 t = 16 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{=1} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$

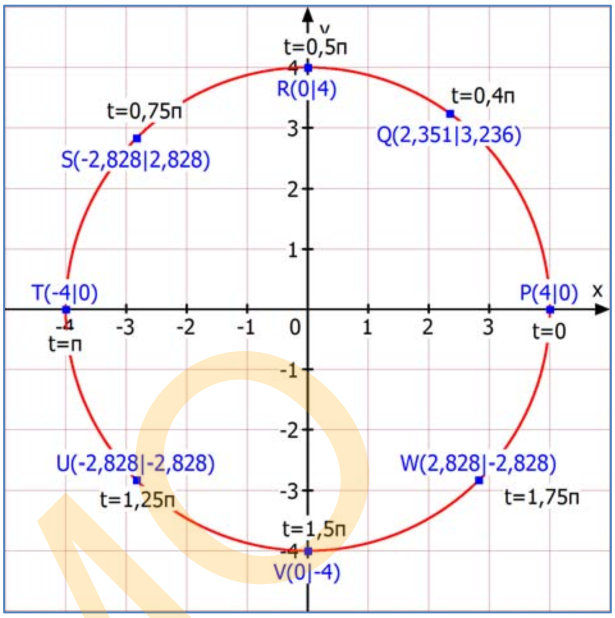
Die dargestellte Kurve ist der **Kreis** um den Ursprung mit Radius 4.

Diese Kurve gehört nicht zu einer Funktion. Man nennt das Gleichungssystem

$$x(t) = 4 \cdot \cos t \quad \text{und} \quad y(t) = 4 \cdot \sin t$$

dann eine Relation.

Der Grund: Die Zuordnung $x \rightarrow y$ ist nicht mehr eindeutig.



Nun allgemein:

$\boxed{14}$ Gegeben ist: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0\,;2\pi[$

Einsetzen in: $x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2(t) + r^2 \cdot \sin^2(t) = r^2 \cdot \left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) = r^2$

Denn bekanntlich ist $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

Ergebnis: $x^2 + y^2 = r^2$ **Ursprungskreis** mit den Radius r.

$\boxed{15}$ Gegeben ist: $x(t) = 5 \cdot \cos(t) - 3$ und $y(t) = 5 \cdot \sin(t) + 2$ für $t \in [0\,;2\pi]$

Aus $x + 3 = 5 \cdot \cos t$ und $y - 2 = 5 \cdot \sin t$ wird durch Quadrieren und

Addieren: $(x+3)^2 = 25 \cdot \cos^2 t$

und $(y-2)^2 = 25 \cdot \sin^2 t$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25 \cdot \underbrace{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}_{=1}$$

Erg.: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$ **Kreis** um $M(-3\,|\,2)$ mit Radius 5.

16 Gegeben: $x(\varphi) = 4\cdot\cos(\varphi)$ und $y(\varphi) = 3\cdot\sin(\varphi)$ für $\varphi \in [0\,;2\pi]$

Aus $\frac{x}{4} = \cos(\varphi)$ und $\frac{y}{3} = \sin(\varphi)$ folgt durch Quadrieren und Addieren:

$$\frac{x^2}{16} = \cos^2(\varphi)$$

und $$\frac{y^2}{9} = \sin^2(\varphi)$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ellipse um $M(0\,|\,0)$ mit a = 4 und b = 3.

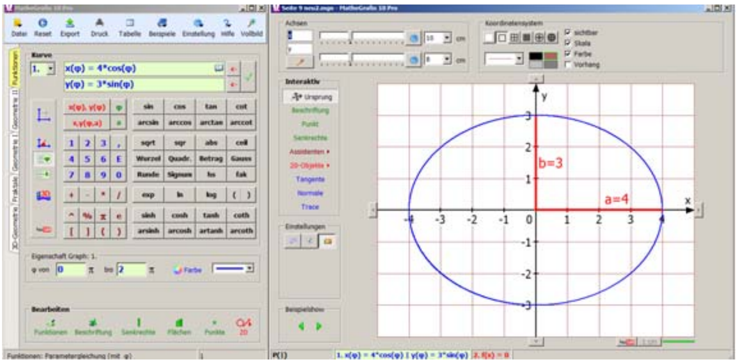
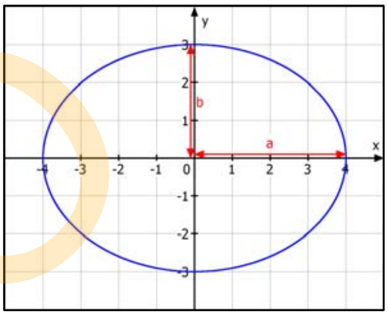


Abb.: Darstellung dieser Ellipse mit MatheGrafix 10

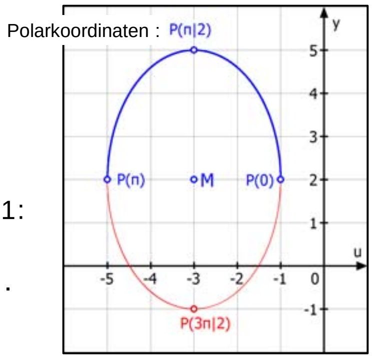
17 Gegeben ist: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cdot\cos(t) \\ b\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0\,;2\pi[$



Jetzt wird man nicht eliminieren, sondern so rechnen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

Ergebnis: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, Ellipse um den Ursprung.



18 $x(t) = 2\cdot\cos(t) - 3$ und $y(t) = 3\cdot\sin(t) + 2$ für $t \in [0\,;\pi]$

Man isoliert sin(t) und cos(t): $\cos(t) = \frac{x+3}{2}$ und $\sin(t) = \frac{y-2}{3}$.

Einsetzen in den trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$:

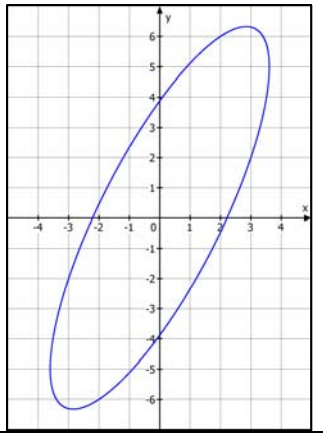
Ergebnis: $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ Halbellipse um $M(-3\,|\,2)$.

Berechnung einiger Punkte:

$t = 0$:	$x(0) = 2\cdot\cos(0) - 3 = -1$,	$y(0) = 3\cdot\sin(0) + 2 = 2$:	$P(0) = (-1\,|\,2)$
$t = \frac{1}{2}\pi$:	$x(\frac{1}{2}\pi) = 2\cdot\cos(\frac{1}{2}\pi) - 3 = -3$	$y(\frac{1}{2}\pi) = 3\cdot\sin(\frac{1}{2}\pi) + 2 = 5$	$P(\frac{1}{2}\pi) = (-3\,|\,5)$
$t = \pi$:	$x(\pi) = 2\cdot\cos(\pi) - 3 = -5$,	$y(\pi) = 3\cdot\sin(\pi) + 2 = 2$:	$P(\pi) = (-5\,|\,2)$
$t = -\frac{3}{2}\pi$:	$x(\frac{3}{2}\pi) = 2\cdot\cos(\frac{3}{2}\pi) - 3 = -3$	$y(\frac{3}{2}\pi) = 3\cdot\sin(\frac{3}{2}\pi) + 2 = -1$	$P(\frac{3}{2}\pi) = (-3\,|\,-1)$

Die untere (rote) Halbellipse wird vom Definitionsbereich $t \in [0\,;\pi]$ nicht mehr erfasst.
Sie gehört zu $t \in [\pi\,;2\pi]$.

19 $x(t) = 3\cdot\cos(t) + 2\cdot\sin(t)$ und $y(t) = 2\cdot\cos(t) + 6\cdot\sin(t)$

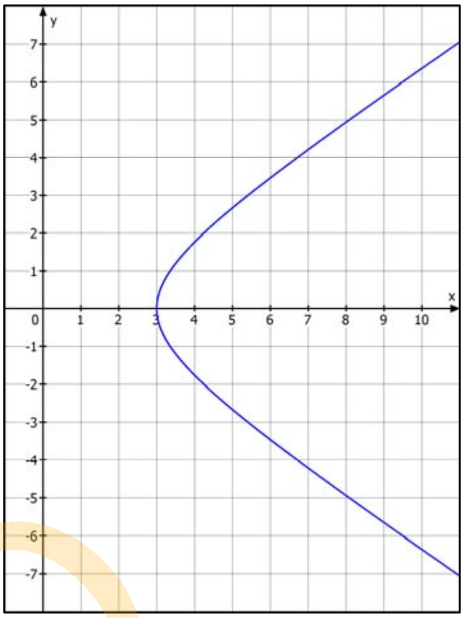


Dies ergibt eine schräg liegende Ellipse. $t \in [0\,;2\pi]$

Sie hat diese Gleichung: $40x^2 - 36xy + 13y^2 = 196$.

Am Produkt xy erkennt man die Schräglage.

Wie man auf diese Gleichung kommt, und wie man die Lage der Ellipse aus der Gleichung berechnet, sprengt diesen Text.



20 $x(t) = 3 \cdot \cosh(t)$ und $y(t) = 2 \cdot \sinh(t)$ für $t \in \mathbb{R}$

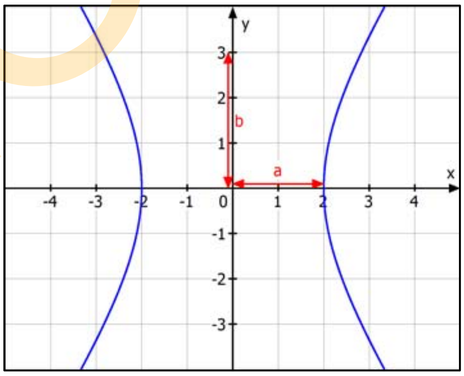
Diese Spezialaufgabe verwendet die hyperbolischen Funktionen.
Für die gilt die Beziehung $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$
Diese Gleichung kann man verwenden und einsetzen:

Aus $x = 3 \cdot \cosh(t)$ und $y = 2 \cdot \sinh(t)$ folgt:

$\cosh t = \frac{x}{3}$ und $\sinh t = \frac{y}{2}$.

Dies ergibt: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

Das ist die Gleichung einer **Hyperbel**.
Zur Kurve gehört nur der rechte Ast der Hyperbel.

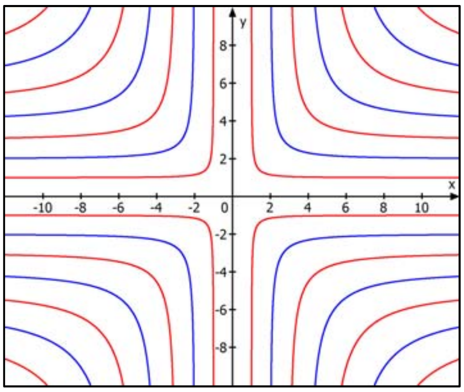


21 Gegeben ist: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \pm a \cdot \cosh(t) \\ b \cdot \sinh(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Hier muss man wissen, dass für diese hyperbolischen Funktionen gilt: $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

Man rechnet daher $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

Ergebnis: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, Hyperbel um den Ursprung.

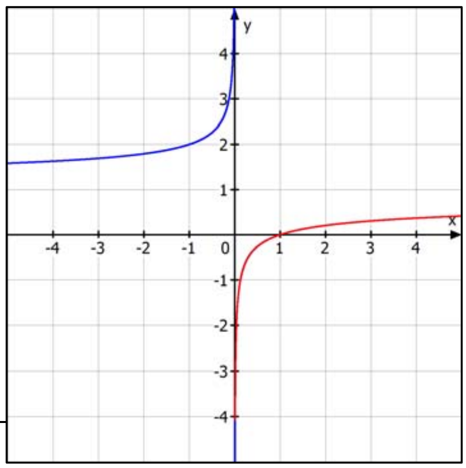


22 Gegeben ist: $x = \frac{a}{\cos(t)}$, $y = \frac{b}{\sin(t)}$ $t \in \left]0\,;2\pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$

Umstellen: $\cos(t) = \frac{a}{x}$, $\sin(t) = \frac{b}{y}$ und

einsetzen in $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$: $\frac{b^2}{y^2} + \frac{a^2}{x^2} = 1$

Die Abbildung zeigt die Kurvenschar für b = a von 1 bis 8: „**Kreuzkurven**".



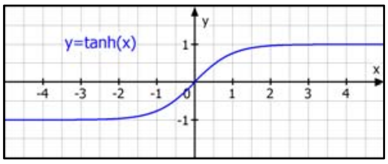
23 Gegeben ist: $x = \frac{1}{t^3}$, $y = 1 - t$

$t = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ einsetzen: $y = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Das ist insofern nicht korrekt, weil so für die Wurzel der Definitionsbereich auf $\mathbf{D} = \mathbb{R}^+$ eingeschränkt wird, sodass man nur den roten, rechten Ast erhält, während die Parametergleichungen die ganze Kurve ergeben.

Korrekt ist: $y=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{für } x>0\\ 1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x}} & \text{für } x<0\end{cases}$

24 Gegeben ist: $x(t)=\frac{1}{2}\cdot\ln(t)$ und $y(t)=1-\dfrac{2}{t+1}$



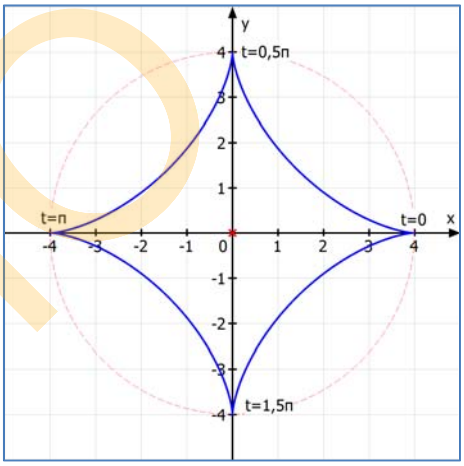
Aus $x=\frac{1}{2}\cdot\ln(t)$ folgt $\ln(t)=2x \Rightarrow t=e^{2x}$

Einsetzen in $y=1-\dfrac{2}{t+1} \Rightarrow y=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{2x}+1-2}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Erweitern mit e^{-x}: $y=\dfrac{(e^{2x}-1)\cdot e^{-x}}{(e^{2x}+1)\cdot e^{-x}}$ d. h. $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\tanh(x)$

Information: Dieser Bruchterm stellt die Funktion tanh(x) dar (Tangens hyperbolicus).

25 $x(t)=a\cdot\cos^3(t)$ und $y(t)=a\cdot\sin^3(t)$ für $t\in[0;2\pi]$



$\cos^3(t)=\dfrac{x}{a} \Rightarrow \cos(t)=\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $\sin(t)=\left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

Einsetzen in $\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$ ergibt

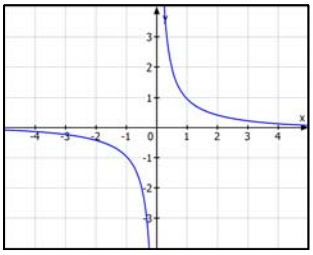
$\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ bzw. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

Rechts die Abbildung für a = 4.

Diese Kurve heißt **Asteroide**.

Sie wird im Text 54115 ausführlich behandelt.

26 $x(t)=2\cdot\ln(t)$, $y(t)=\dfrac{t}{t^2-1}$ $t\in\mathbb{R}^+$.



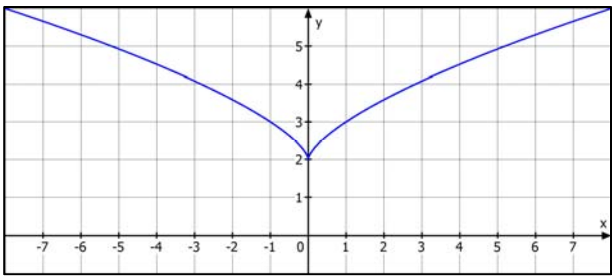
$x=2\cdot\ln t \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\ln(t) \Leftrightarrow t=e^{x/2}$ einsetzen:

$y=\dfrac{e^{x/2}}{e^x-1}$ denn $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2=x^{\frac{x}{2}\cdot 2}=e^x$

Der **Definitionsbereich** ist wegen ln(t) $t\in\mathbb{R}^+$, und zusätzlich gilt $t^2\neq 1 \Leftrightarrow t\neq\pm 1$

Also $\mathbf{D}=\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$. Damit ist x = 0 nicht im Definitionsbereich der e-Funktion.

27 $x(t)=t^3$ und $y(t)=t^2+2$ für $t\in\mathbb{R}$.



$t=\sqrt[3]{x} \Rightarrow y=\sqrt[3]{x}^{\,2}+2$

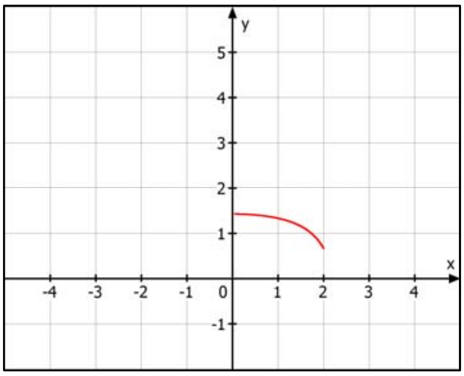
Besser ist $y=\sqrt[3]{x^2}+2$, weil dann der ganze Definitionsbereich erfasst wird.

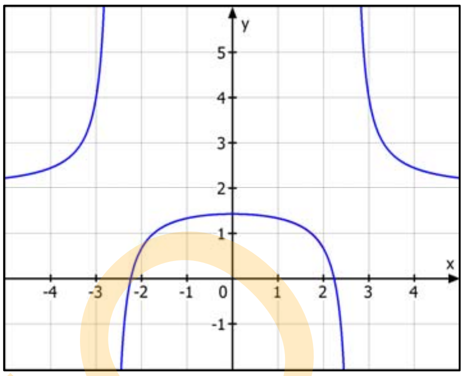
Diese Neilsche Parabel wird im Text 54145 besprochen.

28 $x(t)=\sqrt{4-t^2}$ und $y(t)=\dfrac{2t^2+2}{t^2+3}$. $\quad x=\sqrt{4-t^2} \;\Rightarrow\; 4-t^2=x^2 \;\Rightarrow\; t^2=4-x^2$

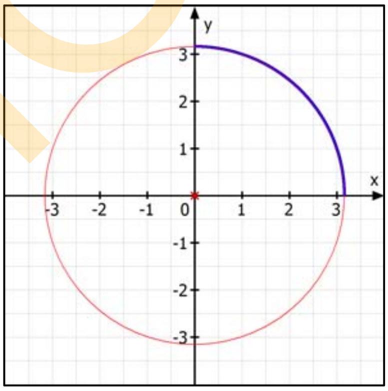
$$y=\frac{2\left(4-x^2\right)+2}{\left(4-x^2\right)+3}=\frac{-2x^2+10}{-x^2+7} \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{2x^2-10}{x^2-7}$$

Definitionsbereich: Für x muss gelten $4-t^2\geq 0 \;\Leftrightarrow\; t^2\leq 4 \;\Leftrightarrow\; |t|\leq 2$.
Doch weil t nur quadratisch auftritt, reicht $t\in[0;2]$. Außerdem ist $x\geq 0$ (linke Abb.)
Die gebrochen rationale Funktion hat dagegen $\mathbf{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{7}\right\}$ (rechte Abb.)





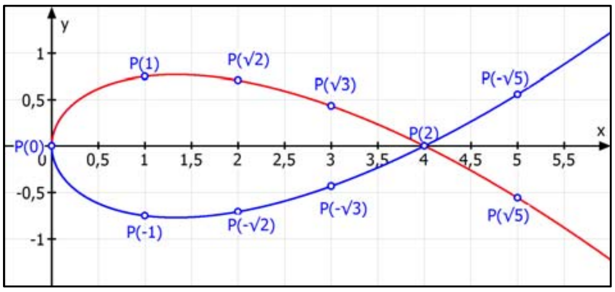
29 $x(t)=\sqrt{t+5},\; y(t)=\sqrt{5-t}$



Für $x(t)$ gilt $t+5\geq 0 \;\Leftrightarrow\; t\geq -5$
Für $y(t)$ gilt $5-t\geq 0 \;\Leftrightarrow\; t\leq 5$
Also gilt $t\in[-5;5]$

Ich berechne:
$x^2+y^2=t+5+5-t \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2=10$
Die Parameterdarstellung erlaubt aber nur $x,y\geq 0$,
stellt also nur den Viertelkreis dar!

30 $x(t)=t^2$ und $y(t)=t-\frac{1}{4}t^3$ für $t\in\mathbb{R}$.



Aus $x=t^2 \;\Rightarrow\; t=\pm\sqrt{x}$. Setzt man das in
$y=t-\frac{1}{4}t^3=\frac{1}{4}t\left(4-t^2\right)$ ein, erhält man für den
einen Kurvenbogen (mit den positiven t-Werten)
diese Kurvengleichungen (2 Teilfunktionen):

$y=\pm\sqrt{x}\mp\frac{1}{4}x\sqrt{x}$ oder $y=\pm\frac{1}{4}\sqrt{x}\cdot(4-x)$

Quadriert man, erhält man eine Gleichung
für die ganze Kurve: $y^2=\frac{1}{16}x(4-x)^2$

Mehr über diese Kurve steht im Text 54011 Seite 48 ff.

31 **Lissajous-Figuren** (Siehe Text 54170) haben z. B. diese Gleichungen:

$x(t)=2\cdot\sin(\varphi)$ und $y(t)=2\cdot\sin(2\varphi)$ für $\varphi\in[0;2\pi]$ also $x,y\in[-2;2]$

Man benötigt jetzt trigonometrische Umformungen:

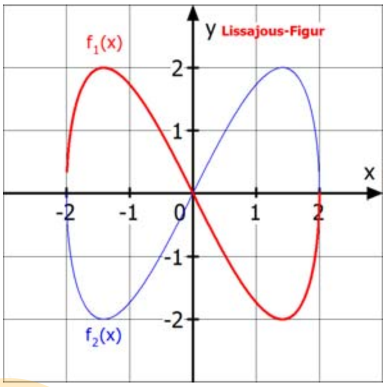
$\sin(2\varphi)=2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$ und $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$,

also $\cos(\varphi)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}$. Damit folgt:

$$y(t)=4\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)=\pm4\cdot\sin(\varphi)\cdot\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}$$

Andererseits ist $\sin(\varphi)=\frac{x}{2}$. Dann folgt durch Einsetzen:

$$y=\pm4\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\pm2x\cdot\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}=\pm2x\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}=\pm x\cdot\sqrt{4-x^2}$$



Ergebnis: $y=\pm x\cdot\sqrt{4-x^2}$

Durch Quadrieren erhält man: $y^2=x^2\cdot(4-x^2)\;\Leftrightarrow\; y^2=4x^2-x^4$

32 $x(t)=2\cdot\sin(\varphi)$ und $y(t)=2\cdot\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$ für $\varphi\in[0;2\pi]$ also $x,y\in[-2;2]$

Jetzt wird diese Gleichung benötigt: $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$:

$$y(t)=2\cdot\sin\left(2\varphi-\tfrac{\pi}{2}\right)=2\cdot\sin(2\varphi)\cdot\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0}-2\cdot\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=1}\cdot\cos(2\varphi)$$

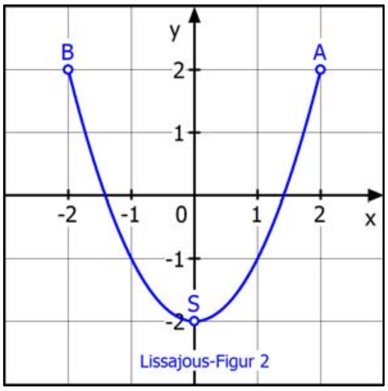
Wissen: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $\sin(2\varphi)=2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$ und

$\cos(2\varphi)=\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)=\left(1-\sin^2(\varphi)\right)-\sin^2(\varphi)=1-2\cdot\sin^2(\varphi)$.

$$y(t)=-2\cdot\left(1-2\cdot\sin^2(\varphi)\right)=-2+4\cdot\sin^2(\varphi)$$

Nun ersetzt man $\sin(\varphi)=\frac{x}{2}$: $y=4\cdot\frac{x^2}{4}-2\;\Leftrightarrow\; y=x^2-2$

Diese Lissajous-Kurve ist ein Parabelbogen, auf dem der Kurvenpunkt hin und her schwingt.

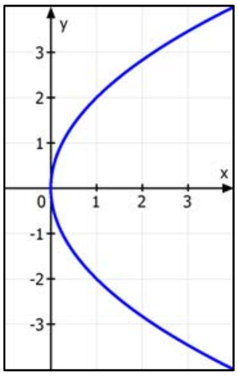


2.2 Algebraische Gleichung $\Rightarrow$ Parametergleichung

Liegt die Gleichung einer Kurve K in expliziter Form $y = f(x)$ vor, dann kann man leicht eine Parametergleichung dazu angeben:

$$\begin{Bmatrix} x = t \\ y = f(t) \end{Bmatrix}$$

Liegt die Gleichung nicht in expliziter Form vor, dann ist es nur in besonderen Fällen möglich, eine Parameterdarstellung zu finden. Manche gelingen nur mit komplizierten Tricks.



Parabel

(1) Gegeben ist die Parabel $y^2 = 4x$.

Setz man $\boxed{x = t^2}$.

erhält man $y^2 = 4 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad y = 2t$.

Die Lösung $y = -2t$ benötigt man nicht, wenn t auch negativ werden kann.

Ergebnis: $\begin{Bmatrix} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{Bmatrix}$

(2) Gegeben ist: $y^2 = \underbrace{x-1}_{t^2}$

Setzt man $\boxed{x - 1 = t^2} \quad \Rightarrow \quad x = t^2 + 1$

erhält man $y^2 = t^2$, was man durch $y = t$ realisieren kann.

Parametergleichungen: $\begin{Bmatrix} x = t^2 + 1 \\ y = t \end{Bmatrix}$

(3) **Gegeben ist** $y^2 = 4\underbrace{(x-1)}_{t^2}$ Scheitelform hergestellt, mit $S(1|0)$.

Setzt man $\boxed{x - 1 = t^2} \quad \Rightarrow \quad x = t^2 + 1$

erhält man $y^2 = 4 \cdot t^2$, was man durch $y = 2t$ realisieren kann.

Ergebnis: $\begin{Bmatrix} x = t^2 + 1 \\ y = 2t \end{Bmatrix}$

(4) Gegeben ist $(y-2)^2 = -6(x+3)$ Scheitel: $S(-3|2)$, nach links geöffnet.

Setzt man $\boxed{-(x+3) = t^2} \quad \Rightarrow \quad x = -t^2 - 3$

ergibt das: $(y-2)^2 = 6t^2$, was man durch $y - 2 = \sqrt{6} \cdot t$ realisieren kann.

Ergebnis: $\begin{Bmatrix} x = -t^2 - 3 \\ y = \sqrt{6} \cdot t \end{Bmatrix}$

(5) Für einen **Kreis** $x^2 + y^2 = r^2$ wählt man $x(t) = r \cdot \cos(t), \; y(t) = r \cdot \sin(t)$

(6) Für eine **Ellipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: $x(t) = a \cdot \cos(t), \; y(t) = b \cdot \sin(t)$

(7) Für eine **Hyperbel**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $x(t) = a \cdot \cosh(t), \; y(t) = b \cdot \sinh(t)$

(8) **Kartesische Blatt**: Algebraische Gleichung: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Parametergleichungen $x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3}$ und $y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ für $t \in \mathbb{R}$.

Es ist sehr schwer, eine dieser Gleichungen aus der anderen herzuleiten, wenn man nicht weiß, wie man ansetzen muss. Man kann aber durch Einsetzen die Richtigkeit beweisen:

$$x^3 + y^3 - 3xy = \frac{27t^3}{(1+t^3)^3} + \frac{27t^6}{(1+t^3)^3} - 3 \cdot \frac{3t}{(1+t^3)} \cdot \frac{3t^2}{(1+t^3)} \frac{(1+t^3)}{(1+t^3)} = 0$$

Hier war es naheliegend, das zu 3xy gehörende Bruchprodukt mit $(1+t^3)$ zu erweitern, damit alle Terme denselben Nenner haben. Im Zähler erhält man dann $-27t^3 - 27t^6$, sodass man insgesamt 0 erhält.

Es gibt außerdem diese Polarkoordinatengleichung: $r = 3\dfrac{\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{\sin^3(\varphi)+\cos^3(\varphi)}$,

was im Abschnitt 4 bewiesen wird.

Daraus kann man folgern: $x = r\cdot\cos(\varphi) \Rightarrow x = 3\dfrac{\sin(\varphi)\cdot\cos^2(\varphi)}{\sin^3(\varphi)+\cos^3(\varphi)}$

$y = r\cdot\sin(\varphi) \Rightarrow x = 3\dfrac{\sin^2(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{\sin^3(\varphi)+\cos^3(\varphi)}$

(6) Die Gleichung $x^3 - y^3 + 3y = 0$ heißt „implizit", weil sie nicht nach x oder y aufgelöst ist. Für eine Parametrisierung stelle ich die Gleichung nach x um.

Dazu muss man folgenden Hintergrund kennen: Welche Lösung hat die Gleichung $x^3 = a$?

⇒ Ist $a \geq 0$, dann gilt $x = \sqrt[3]{a}$, ist aber a < 0, dann gilt $x = -\sqrt[3]{|a|}$

Man muss also den Definitionsbereich für x^3 ermitteln, d.h.: Wo ist $y^3 - 3y \geq 0$

Dazu erstelle ich eine **Vorzeichentabelle** für den Term $R = y\cdot(y^2-3)$

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		y
y	−		−	0	+		+	
y^2-3	+	0	−		−	0	+	
R	−		+		−		+	

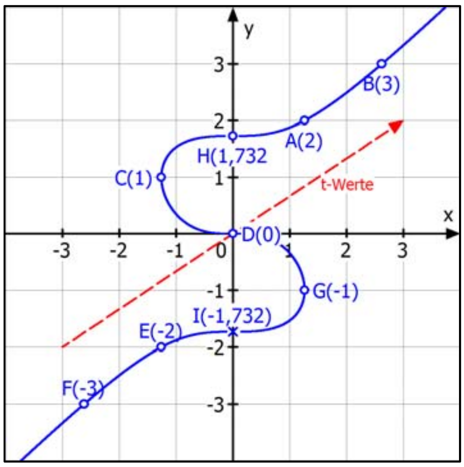
Ergebnis:

Für $t \in [-\sqrt{3}; 0] \cup [\sqrt{3}; \infty[$ ist $R \geq 0$.

Dann ist $x = \sqrt[3]{t^3 - 3t}$

Für $t \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]0; \sqrt{3}[$ ist R < 0.

Dann ist $x = -\sqrt[3]{-t^3 + 3t}$



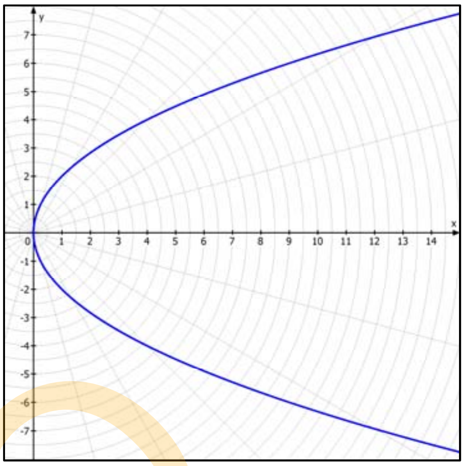
Zur Abbildung: Die Zahlen hinter den Punkten sind die zugehörenden t-Werte. Man erkennt, dass für t von $-\infty$ bis ∞ die Kurve von links unten bis rechts oben durchlaufen wird.

Siehe auch Text 41105 Seite 19 für Ableitungen.

Ergebnis: $y(t) = t$ und $x(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t^3 - 3t} & \text{für } t \in [-\sqrt{3}; 0] \cup [\sqrt{3}; \infty[\\ -\sqrt[3]{-t^3 + 3t} & \text{für } t \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]0; \sqrt{3}[\end{cases}$

2.3 Algebraische Gleichung $\Rightarrow$ Polarkoordinatenform

Für manche Umformungen genügt es, wenn man die Formeln für die Umrechnung der Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten für x und y einsetzt: $x = r\cdot\cos(\varphi),\ \ y = r\cdot\sin(\varphi)$



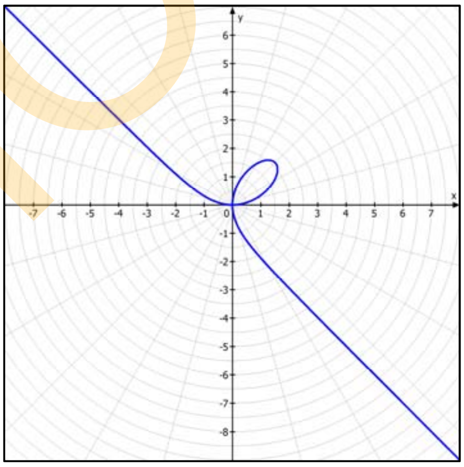
(1) $y^2 = 4x$ Einsetzen der Umrechnungsgleichungen:

ergibt:

$$r^2\cdot\sin^2(\varphi) = 4\cdot r\cdot\cos(\varphi) \qquad |:r$$

$$r\cdot\sin^2(\varphi) = 4\cdot\cos(\varphi)$$

$$r = 4\cdot\frac{\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}$$



(2) Für das **kartesische Blatt** findet man diese algebraische Gleichung: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Durch Einsetzen folgt:

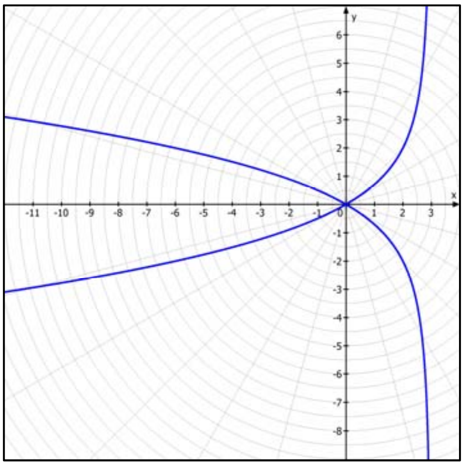
$$r^3\cdot\cos^3(\varphi) + r^3\cdot\sin^3(\varphi) - 3r^2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) = 0 \quad |:r^2$$

$$r\cdot\cos^3(\varphi) + r\cdot\sin^3(\varphi) - 3\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) = 0$$

$$r\cdot\left(\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi)\right) - 3\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi) = 0$$

$$r = 3\cdot\frac{\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi)}$$

Mehr zu dieser Kurve im Text 54011 Seite 15 und Text 54150



(3) Für die **Zissoide** gilt: $x^2 + x\cdot y^2 - a\cdot y^2 = 0$

Siehe Text 54128.

Durch Einsetzen folgt:

$$r^2\cdot\cos^2(\varphi) + r\cdot\cos(\varphi)\cdot r^2\cdot\sin^2(\varphi) - a\cdot r^2\cdot\sin^2(\varphi) = 0 \qquad |:r^2$$

$$\cos^2(\varphi) + r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi) - a\cdot\sin^2(\varphi) = 0$$

$$r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi) = a\cdot\sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)$$

$$r = \frac{a\cdot\sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)}{\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)}$$

Drückt man alles durch $\cos(\varphi)$ aus, folgt:

$$r = \frac{a\cdot\left(1-\cos^2(\varphi)\right) - \cos^2(\varphi)}{\cos(\varphi)\cdot\left(1-\cos^2(\varphi)\right)} = \frac{a - a\cdot\cos^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)}{\cos(\varphi)\cdot\left(1-\cos^2(\varphi)\right)}$$

$$r = \frac{a - (a+1)\cdot\cos^2(\varphi)}{\cos(\varphi)\cdot\left(1-\cos^2(\varphi)\right)}$$

(4) Die **Konchoide** hat die Gleichung: $\left(x^2+y^2\right)(x-b)^2-a^2x^2=0$ (Text 54130)

Durch Einsetzen folgt:

$$\left(r^2\cdot\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)\right)\left(r\cdot\cos(\varphi)-b\right)^2-a^2\cdot r^2\cdot\cos^2(\varphi)=0$$

$$r^2\underbrace{\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)}_{=1}\left(r\cdot\cos(\varphi)-b\right)^2-a^2\cdot r^2\cdot\cos^2(\varphi)=0 \quad |:r^2$$

$$\left(r\cdot\cos(\varphi)-b\right)^2-a^2\cdot\cos^2(\varphi)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(r\cdot\cos(\varphi)-b\right)^2=a^2\cdot\cos^2(\varphi) \quad |\ \sqrt{\ }$$

$$r\cdot\cos(\varphi)-b=\pm a\cdot\cos(\varphi) \quad\Leftrightarrow\quad r\cdot\cos(\varphi)=b\pm a\cdot\cos(\varphi)$$

Erg.: $$r=\frac{b\pm a\cdot\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} \quad\Leftrightarrow\quad r=\frac{b}{\cos(\varphi)}\pm a$$

(5) Die **Strophoide** hat die Gleichung $y^2(a-x)=x^2(a+x)$ (Text 54125)

Durch Einsetzen folgt:

$$\cancel{r^2}\sin^2(\varphi)\cdot\left(a-r\cdot\cos(\varphi)\right)=\cancel{r^2}\cdot\cos^2(\varphi)\cdot\left(a+r\cdot\cos(\varphi)\right)$$

$$a\cdot\sin^2(\varphi)-r\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)-a\cdot\cos^2(\varphi)-r\cdot\cos(\varphi)\cdot\cos^2(\varphi)=0$$

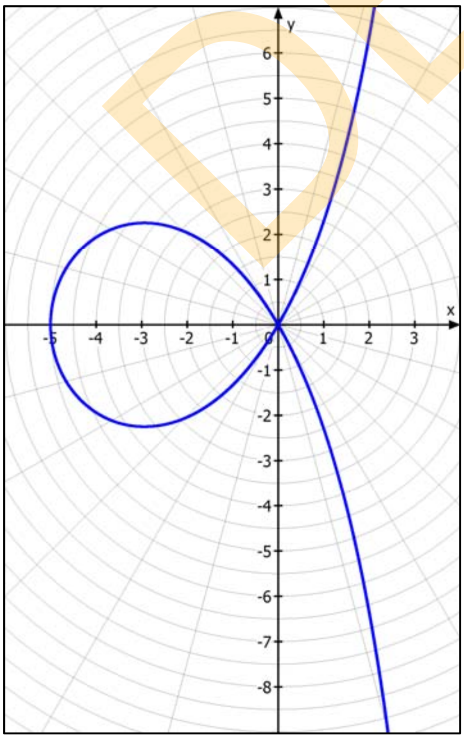
$$a\cdot\left[\sin^2(\varphi)-\cos^2(\varphi)\right]-r\cdot\cos(\varphi)\cdot\left[\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\right]=0$$

Wissen: $$\boxed{\begin{array}{l}\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)=\cos(2\varphi)\\ \sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1\end{array}}$$

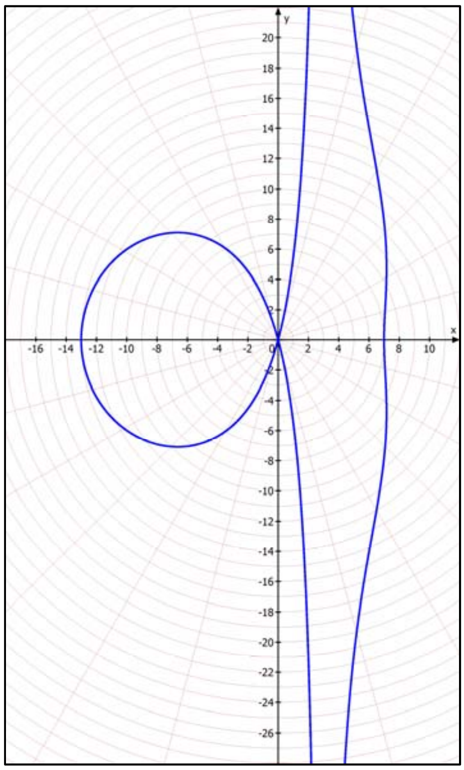
Also: $$-a\cdot\cos(2\varphi)-r\cdot\cos(\varphi)=0$$

Ergebnis: $$r=-\frac{a\cdot\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)} \qquad (3)$$

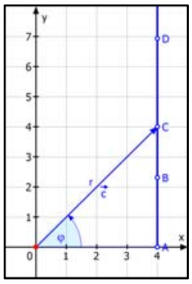
Konchoide



Strophoide



2.4 Polarkoordinatenform $\Rightarrow$ algebraische Gleichung



(1) $r = \dfrac{4}{\cos(\varphi)} \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot \cos(\varphi) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

Diese Gleichung stellt eine Gerade dar, und zwar eine Parallele zur y-Achse. Wichtig ist nun der Definitionsbereich:

Für $\varphi \in \left[0 ; \tfrac{1}{2}\pi\right[$ erhält man die obere Halbgerade

$\varphi = 0 \Rightarrow r = \dfrac{4}{1} = 4 \Rightarrow x = r \cdot \cos(0) = 4 \cdot 1 = 4,\ y = r \cdot \sin(0) = 4 \cdot 0 = 0$ also $A(4\,|\,0)$

$\varphi = \tfrac{1}{6}\pi \Rightarrow r = \dfrac{4}{\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right)} = \dfrac{4}{\tfrac{1}{2}\sqrt{3}} \approx 4{,}62 \Rightarrow x = 4,\ y = 4{,}62 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) \approx 2{,}31$ also $P(4\,|\,2{,}31)$

$\varphi = \tfrac{1}{4}\pi \Rightarrow r = \dfrac{4}{\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)} = \dfrac{4}{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}} \approx 5{,}66 \Rightarrow x = 4,\ y = 5{,}66 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = 4$ also $P(4\,|\,4)$

$\varphi = \tfrac{1}{3}\pi \Rightarrow r = \dfrac{4}{\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)} = \dfrac{4}{\tfrac{1}{2}} = 8 \Rightarrow x = 4,\ y = 8 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) \approx 6{,}93$ also $P(4\,|\,6{,}93)$

$\varphi \to \tfrac{1}{2}\pi \Rightarrow r = \dfrac{4}{\cos(\varphi)} \to \infty$, also auch $y \to \infty$

Will man die ganze Gerade, muss man z.B. $\varphi \in \left]-\tfrac{1}{2}\pi ; \tfrac{1}{2}\pi\right[$ verwenden.

(2) $r(\varphi) = a \cdot \sin(\varphi)$ für $\varphi \in [\,0 < 180^\circ[$ $k \neq 0$

Aus $r = a \cdot \sin(\varphi)$ folgt mit $\sin(\varphi) = \dfrac{y}{r}$ die Gleichung $r = a \cdot \dfrac{y}{r} \Leftrightarrow r^2 = a \cdot y$

Außerdem gilt: $x^2 + y^2 = r^2$, also erhält man

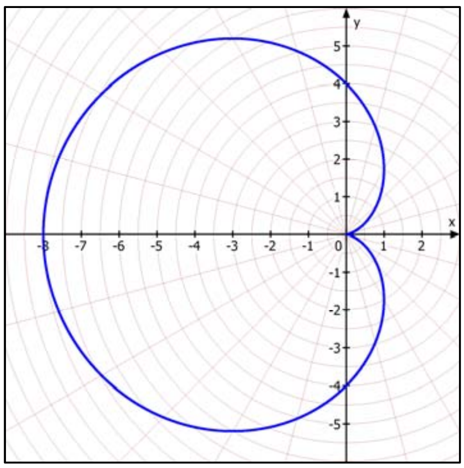
$$x^2 + y^2 = a \cdot y$$
$$x^2 + y^2 - a \cdot y = 0$$
$$x^2 + \left(y^2 - a \cdot y + \boxed{}\right) = 0$$

Ergänzung des Quadrats: Dazu wird a halbiert und dann quadriert:

$$x^2 + \left(y^2 - a \cdot y + \boxed{\tfrac{a}{2}}^2\right) = + \boxed{\tfrac{a}{2}}^2$$
$$x^2 + \left(y - \tfrac{a}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

Das ist die **Gleichung eines Kreises** um $M\left(0\,|\,\tfrac{1}{2}a\right)$ mit dem Radius $\tfrac{1}{2}a$.
Dieser Kreis geht außerdem durch den Ursprung.

(3) Die Kardioide kann diese Gleichung haben: $r = 4(1 + \cos(\varphi))$ $\varphi \in [0 ; 2\pi[$ (Text 54112)



$\cos(\varphi) = \dfrac{x}{r}$: $\quad r = 4 \cdot \left(1 + \dfrac{x}{r}\right)$

$$r = \frac{4 \cdot (r + x)}{r}$$
$$r^2 = 4r + 4x$$

$r^2 = x^2 + y^2$: $\quad x^2 + y^2 = 4\sqrt{x^2 + y^2} + 4x$

$$\left(x^2 + y^2\right) - 4x = 4\sqrt{x^2 + y^2}$$

Quadrieren: $\quad \left(x^2 + y^2\right)^2 - 8x \cdot \left(x^2 + y^2\right) + \cancel{16x^2} = 16\left(\cancel{x^2} + y^2\right)$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 8x \cdot \left(x^2 + y^2\right) - 16y^2 = 0$$

(4) $r(\varphi)=\dfrac{a}{b\cdot\cos(\varphi)+c\cdot\sin(\varphi)}$

Ich ersetze $\cos(\varphi)=\frac{x}{r}$ und $\sin(\varphi)=\frac{y}{r}$: $\quad r=\dfrac{a}{b\cdot\frac{x}{r}+c\cdot\frac{y}{r}}$

Den Bruch mit r erweitern: $\quad r=\dfrac{a\cdot r}{b\cdot\frac{x}{r}\cdot r+c\cdot\frac{y}{r}\cdot r}$

$$r=\frac{a\cdot r}{b\cdot x+c\cdot y} \qquad |\ :r$$

$$1=\frac{a}{bx+cy} \quad\Leftrightarrow\quad bx+cy=a$$

Das ist die Gleichung einer ***Geraden***. Da aber die Wertemengen von Sinus und Kosinus begrenzt sind, wird nicht die ganze Gerade erfasst. Dazu ein Beispiel:

Für a = c = 1 und b = -1 erhält man daraus:

$r(\varphi)=\dfrac{1}{\sin(\varphi)-\cos(\varphi)}$ und die Koordinatendarstellung $-x+y=1 \;\Leftrightarrow\; y=x+1$

Wir bestimmen zuerst den **Definitionsbereich** für $r(\varphi)$:

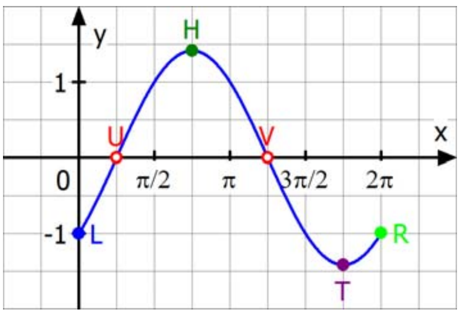
Zunächst kann man sich fragen, welche Werte der Nenner annehmen kann.

Wir beginnen bei $\varphi=0 \;\Rightarrow\; r(0)=\dfrac{1}{\sin(0)-\cos(0)}=\dfrac{1}{-1}=-1$

Hier erkennt man, dass dies nicht möglich ist, denn für Polarkoordinaten lautet die Grund-Bedingung: $r(\varphi)\ge 0$.

MatheGrafix gibt dazu eine erste Auskunft:

Das ist der Verlauf der Nennerfunktion für $[0;2\pi]$.



Dazu kommt aber noch, dass es zwei Nullstellen des Nenners gibt, die man ausschließen muss:

Wann ist $\sin(\varphi)-\cos(\varphi)=0$?

d. h. $\sin(\varphi)=\cos(\varphi) \quad |\ :\cos(\varphi)\ne 0$

$\tan(\varphi)=1$

Also $\varphi=\frac{1}{4}\pi$ oder $\frac{5}{4}\pi$. Dazu gibt es keine Geradenpunkte (die „Kurve“ ist eine Gerade!)

Beides sind Polstellen der Nennerfunktion, also gilt: $\varphi\to\frac{1}{4}\pi \;\Rightarrow\; r(\varphi)\to\infty$.

Man kann durch Rechnung bestätigen, was die Abbildung zeigt:

Dazu berechne ich die Extremwerte der Nennerfunktion $N(\varphi)=\sin(\varphi)-\cos(\varphi)$

Ableitungen: $N'(\varphi)=\cos(\varphi)+\sin(\varphi)$ und $N''(\varphi)=-\sin(\varphi)-\cos(\varphi)$.

Extremwertbedingung:

$$N'(\varphi)=0 \;\Leftrightarrow\; \cos(\varphi)+\sin(\varphi)=0 \;\Leftrightarrow\; \sin(\varphi)=-\cos(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \tan(\varphi)=-1$$

In $[0;2\pi]$ sind das die Stellen $\varphi=\frac{3}{4}\pi$ und $\varphi=\frac{7}{4}\pi$.

Kontrolle: $N''\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}<0 \;\Rightarrow\;$ Maximum.

$N''\left(\frac{7}{4}\pi\right)=-\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)-\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}<0 \;\Rightarrow\;$ Minimum

Uns betrifft nur die Stelle $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Hier hat der Nenner ein Maximum und der Bruch, also der Radius r ein Minimum.

Zugehörender Kurvenpunkt: $r\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

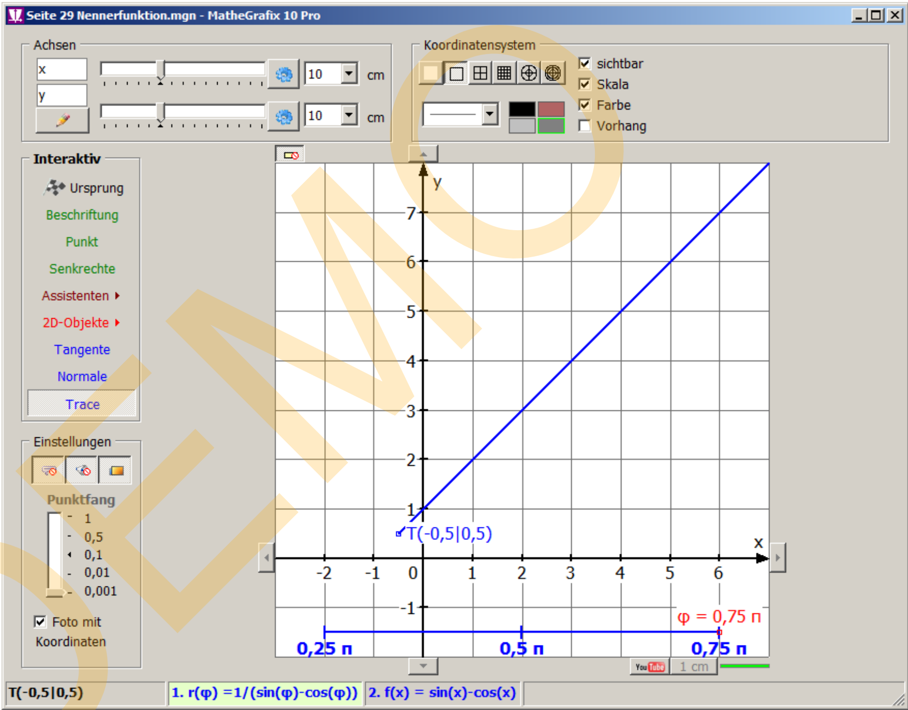
$x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = r \cdot \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, $y\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ also $T\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}\right)$.

Durchläuft also φ das Intervall $\mathbf{D} = \left]\frac{1}{4}\pi ; \frac{5}{4}\pi\right[$, dann bewegt sich der Kurvenpunkt “aus dem Unendlichen“ von rechts oben nach links unten zu P_1, also zum Endpunkt eine Halbgeraden. Diese wird dann ein zweites Mal durchlaufen, und zwar in umgekehrter Richtung für

für $\varphi \in \left[\frac{3}{4}\pi ; \frac{5}{4}\pi\right[$

Es folgt ein Screenshot von MatheGrafix im Trace-Modus.

Als Definitionsbereich für φ habe ich $[0{,}25\pi ; 0{,}75\,\pi]$ eingegeben, und man erkennt, dass sich der Kurvenpunkt für $\varphi = 0{,}75\pi$ gerade im „Tiefpunkt“ T befindet. Man kann diese Bewegung im Trace-Modus sehr schön beobachten, wenn man die Maus von links nach rechts bewegt.



Ergebnis: Die durch die Gleichung $r(\varphi) = \dfrac{1}{\sin(\varphi) - \cos(\varphi)}$ definierte Kurve ist eine Halbgerade

Mit einem minimalen Definitionsbereich von $\mathbf{D}_\varphi = \left]\frac{1}{4}\pi ; \frac{5}{4}\pi\right[$ und der expliziten Geradengleichung $y = x + 1$ mit $\mathbf{D}_x = \left[-\frac{1}{2} ; \infty\right[$

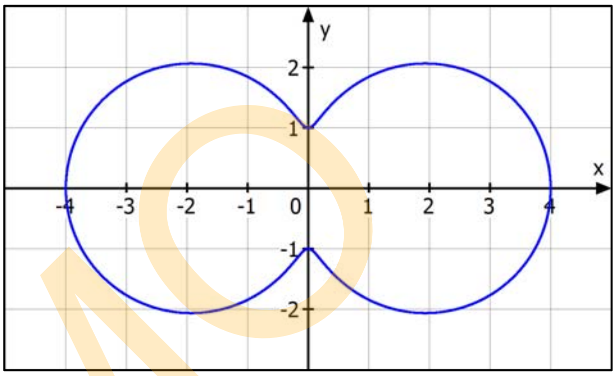
(5) $r(\varphi)=\sqrt{\sin^2(\varphi)+16\cdot\cos^2(\varphi)}$, $\varphi\in[0\,;2\pi[$

Zuerst quadrieren und dann $\sin(\varphi)=\frac{y}{r}$ und $\cos(\varphi)=\frac{x}{r}$ und $r^2=x^2+y^2$ ersetzen:

$$x^2+y^2=\frac{y^2}{x^2+y^2}+16\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\qquad |\ \cdot(x^2+y^2)$$

$$(x^2+y^2)^2=y^2+16x^2$$

Wenn man den Definitionsbereich hinsichtlich φ bestimmen soll, muss man so argumentieren: Wegen $\sin^2(\varphi)\geq 0$ und $\cos^2(\varphi)\geq 0$ ist auch $2\cdot\sin^2(\varphi)+4\cdot\cos^2(\varphi)$ stets ≥ 0, also gibt es keine Einschränkungen. Lediglich nach $\Delta\varphi=2\pi$ wiederholen sich wegen der Periodizität die r-Werte.

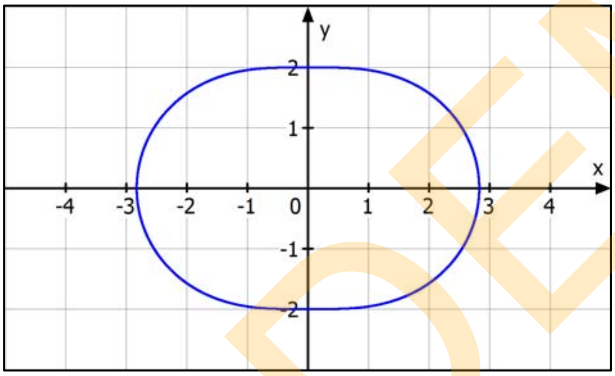


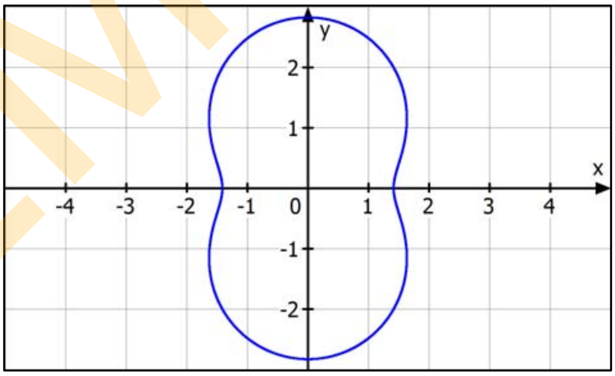
Unten noch zwei Kurven dieses Typs:

$r(\varphi)=\sqrt{4\cdot\sin^2(\varphi)+8\cdot\cos^2(\varphi)}$

und (rechts)

$r(\varphi)=\sqrt{8\cdot\sin^2(\varphi)+2\cdot\cos^2(\varphi)}$





2.5 Polarkoordinatenform $\Rightarrow$ Parametergleichung

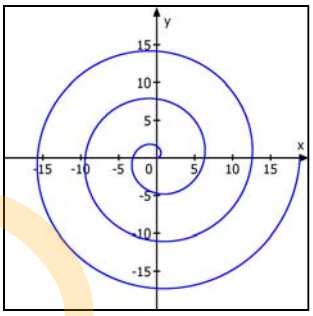
(1) Archimedische Spirale:

Ein Strahl $\overrightarrow{OP}$ dreht sind gleichförmig (also mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) um den Ursprung und zugleich bewegt sich P gleichförmig von O weg. Man kann sich das so vorstellen, als ob sich ein Kran gleichförmig dreht und sich dabei die Laufkatze auf dem Ausleger nach außen wegbewegt.

Die Gleichung in Polarkoordinaten lautet: $r = a \cdot \varphi$.

Daraus kann man die kartesischen Koordinaten wie üblich berechnen:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}} \qquad \text{mit } a > 0 \text{ und } \varphi \ge 0$$



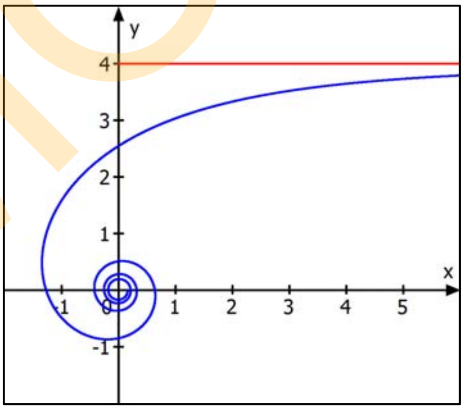
Das ergibt dann diese Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= a \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi) \\ y(\varphi) &= a \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Die Abbildung verwendet a = 1 und $\varphi \in [\,0\,;6\pi\,]$.

(2) Die Hyperbolische Spirale

Bei dieser Spirale ist der Radius umgekehrt proportional zum Drehwinkel: $r = \frac{a}{\varphi}$



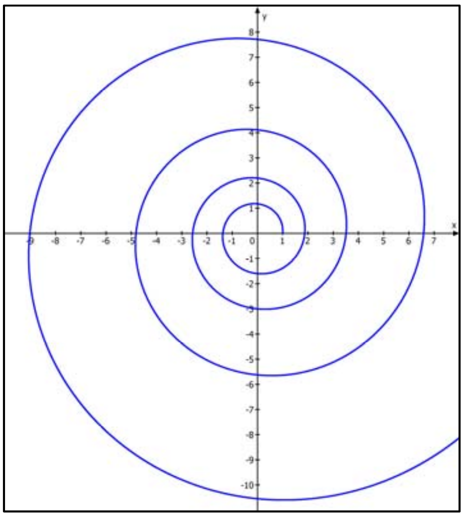
Es folgt:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= a \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\varphi} \\ y(\varphi) &= a \cdot \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \end{aligned}$$

Die Abbildung verwendet a = 5 und $\varphi \in [\,0\,;8\,\pi]$.

(3) Die logarithmische Spirale

Hier gilt: $r = e^{a \cdot \varphi}$



Die Abbildung verwendet a = 0,1 und $\varphi \in [\,0\,;8\pi\,]$

Für $\varphi \to \infty$ geht $r \to \infty$, für $\varphi \to -\infty$ geht $r \to 0$

Es folgt:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= e^{a \cdot \varphi} \cdot \cos(\varphi) \\ y(\varphi) &= e^{a \cdot \varphi} \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Spiralen werden im Text 54135 besprochen.